Untersuchung der Aussagefähigkeit mathematisch formulierter Investitionsmodelle mit Hilfe einer Fehlerrechnung

---

von

Jürgen Bloech

Göttingen 1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544311_0001

UNTERSUCHUNG DER AUSSAGEFÄHIGKEIT MATHEMATISCH FORMULIERTER INVESTITIONS-MODELLE MIT HILFE EINER FEHLERRECHNUNG

Dissertation

zur Erlangung des
wirtschaftswissenschaftlichen Doktorgrades

der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt
von
Jürgen Bloech
aus Tranßau

Göttingen 1966

Berichterstatter: Professor Dr. Wolfgang Lücke

Mitberichterstatter: Professor Dr. Hans Dieter Deppe

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1966

Inhalt

Seite

EINLEITUNG 1

Erstes Kapitel

DAS INVESTITIONSMODELL ALS OBJEKT DER UNTERSUCHUNG

I. Das monetäre Bild einer Investition 3
A. Das allgemeine Investitionsmodell 3
B. Die Zinsen 5
C. Die Modellelemente 8
1. Kosten oder Ausgaben bei linearer Abschreibung? 8
2. Kosten oder Ausgaben bei nichtlinearer Abschreibung? 10
D. Die isolierte Untersuchung einer Investition 12
II. Die Zielfunktion der Unternehmung als Einteilungskriterium für die Investitionsmodelle 14
III. Die Berücksichtigung ein- und mehrwertiger Erwartungen in der Investitionsrechnung 17

Zweites Kapitel

DAS RECHNEN MIT FEHLERBEHAFTETEN GRÖSSEN

I. Präzise und gerundete Zahlen 21
II. Die Klassifikation der Fehler 23
III. Die Fortpflanzung absoluter und relativer Fehler 26
A. Der Fehler einer Summe und einer Differenz 26
B. Der Fehler eines Produktes und eines Quotienten 29
C. Der Fehler einer allgemeinen stetigen Funktion 31
IV. Die Fortpflanzung zufälliger, statistisch verteilter Fehler 34
A. Rechengrößen der statistischen Fehlerverteilung 34
B. Der mittlere Eingangsfehler in einfachen Verknüpfungen 38

Drittes Kapitel

DIE AUSSAGEANALYSE DER INVESTITIONSMODELLE UNTER DER ANNAHME EINWERTIGER ERWARTUNGEN

I. Modelle der Gewinnmaximierung 41
A. Die Diskontierungs- oder Kapitalwertmethode 41
1. Modellbeschreibung 41
2. Modellanalyse 42
3. Die Empfindlichkeit der Kapitalwertmethode gegen Zinsschwankungen 43
a. Berechnung des Zinsfehlers 43

Seite

b. Darstellung des Zinsfehlers für zeitlich konstante Gewinne 47
c. Darstellung des Zinsfehlers bei linear fallenden Gewinnen 52
d. Darstellung des Zinsfehlers bei degressiv fallenden Gewinnen 55
e. Darstellung des Zinsfehlers bei progressiv fallenden Gewinnen 59
4. Reaktion der Modellergebnisse auf Zinsschwankungen 63
a. Die Stabilität des Investitionsvergleichs in der Kapitalwertmethode gegenüber Zinsschwankungen 63
b. Die Stabilität der Vorteilhaftigkeit in der Kapitalwertmethode gegenüber Zinsschwankungen 70
5. Die Empfindlichkeit des Kapitalwertes gegen Abweichungen der Einnahmen und Ausgaben 72
6. Die optimale Nutzungsdauer einer einzelnen Anlage 80
B. Die Annuitätsmethode 85
1. Modellbeschreibung 85
2. Modellanalyse 86
3. Die Empfindlichkeit des Modells der Annuitätsmethode auf Eingangsfehler 88
a. Die Auswirkung von Zinsfehlern 88
b. Die Auswirkung von Gewinnfehlern 94
C. Der Verfahrensvergleich 96
1. Modellbeschreibung 96
2. Modellanalyse 98
3. Fehlerbetrachtung 99
D. Die klassischen Ersatzmodelle 101
1. Der Ersatz von Anlagen, deren Leistungsfähigkeit mit der Zeit nachläßt 101
a. Die Beschreibung einiger Modelle 101
(1) Die Theorie des maximalen Goodwill 101
(2) Die Theorien der minimalen Kosten von SCHNEIDER, RIFAS, SASIENI-YASPAN-FRIEDMAN 105
(3) CAPLAN's Modell 110
(4) Der Kostenvergleich von SCHNEIDER 111
(5) Der optimale Ablösungszeitpunkt im Goodwillmodell 112
b. Modellanalyse und Fehlerbetrachtung 116
2. Der Ersatz plötzlich versagender Objekte 122
a. Der Aufbau des Modells von RIFAS 122
b. Die Einführung von Zinsen in das RIFASsche Modell 127
c. Fehlerauswirkung 130
E. Das Modell der ersten MAPI - Methode 133
1. Modellbeschreibung 133
2. Modellerklärung 135
a. Die Struktur der Investitionskette 135

Seite

b. Der Ersatzzeitpunkt 137
c. Der Verfahrensnachteil des Defenders 139
d. Der Verfahrensnachteil des Challengers 140
e. Die Dimension des durchschnittlichen Verfahrensnachteils 144
3. Die Modellempfindlichkeit gegen Änderungen der Modellelemente 145
II. Modelle der Rentabilitätsmaximierung 149
A. Die Methode des internen Zinsfußes 149
1. Modellbeschreibung 149
2. Modellanalyse 150
a. Die Ermittlung des internen Zinsfußes 150
b. Die Analyse der Modellaussage 163
3. Die Empfindlichkeit des internen Zinsfußes gegen Eingangsfehler 164
B. Die Theorie der minimalen Nutzleistungskosten 168
C. Das Modell der zweiten MAPI - Methode 172
1. Die Beschreibung des Modells 172
a. Der Begriff relative Rentabilität 172
b. Der Begriff und die Ermittlung des Kapitalverzehrs 174
2. Modellaussage und Modellanalyse 183
3. Abweichungsanalyse 188
III. Das Modell zur Minimierung der Kapitalrückflußdauer, die Pay - off - Methode 191

SCHLUSS 194

ANHANG 1 196
ANHANG 2 198
ANHANG 3 200
ANHANG 4 202
ANHANG 5 205
ANHANG 6 208
ANHANG 7 210
Verzeichnis der Symbole 211
Abkürzungen 215
Literaturverzeichnis 216

EINLEITUNG

Der Vorgang einer betrieblichen Investition wird in der Form einer Transformation von Zahlungsmitteln in konkrete Werte vollzogen. Untrennbar damit verbunden stellt die Desinvestition die Freisetzung gebundener Zahlungsmittel dar[1]. Beide Transformationen drücken sich in zwei Zahlungsströmen aus, die das wirtschaftliche Bild einer Investition zeichnen[2].

Die Investitionsrechnung versucht, mit verschiedenen Methoden einheitliche Maßgrößen für die vielgestaltigen Investitionsobjekte zu schaffen, damit der Unternehmer mit Hilfe dieser Maßgrößen die für seinen Betrieb günstigsten Verfahren ermitteln kann[3]. In der Literatur treten die Analyse der Modelle und die Verbindung der einzelnen Methoden gegenüber der deskriptiven Darstellung weitgehend in den Hintergrund. Diese Tatsache erschwert die numerische Rechnung und die Kontrolle der Ergebnisse der verschiedenen Methoden.

Da die Größen, aus denen sich ein Investitionskalkül aufbaut, nur mit begrenzter Genauigkeit ermittelt werden können, liegt auf der Hand, daß die Rechenergebnisse auch keine genauen Werte präsentieren. Einem solchen Tatbestand wird in allen angewandten Wissenschaften - Physik, Chemie, Geodäsie usw. - durch eine Fehlerbetrachtung Rechnung getragen. In der Investitionsrechnung fehlen bisher Aussageanalysen, die den Näherungscharakter der Ergebnisse durch eine Fehlerbetrachtung berücksichtigen[4].

---

[1] Vgl. Pack, L.: Betriebliche Investitionen, Wiesbaden 1959, S.45.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, Theorie der Investition, 4. durchg. Aufl. Tübingen-Zürich 1962, S.1ff. Boulding, K.E.: The Theory of a Single Investment, in: Quarterly Journal of Economics Bd.49 1934/35, S.476.

[3] Vgl. Gutenberg, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1958, S.60.

[4] In den Wirtschaftswissenschaften wurden bisher nur vereinzelt quantitative Fehlerabschätzungen durchgeführt. Vgl. hierzu Morgenstern, O.: Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen, 2. neu bearb. und verbesserte Aufl. Wien-Würzburg 1965, S.6ff.

Als Folge des Fehlens einer systematischen Fehlerbetrachtung erscheinen in der Literatur in den numerisch berechneten Beispielen teilweise Ergebnisse, in denen sich die Illusion einer großen Genauigkeit widerspiegelt[1]. Die Angabe von mehr Stellen eines zahlenförmigen Resultates, als wegen der Fehler in den Eingangsgrößen gerechtfertigt sind, deutet daraufhin, daß der Kalkül außer Kontrolle des Rechners geraten ist[2].

Aufgabe der folgenden Untersuchung ist es, die bestehenden Investitionskalküle zu analysieren und auf ihre Fehlerempfindlichkeit gegenüber kleinen Schwankungen der Eingangsgrößen zu untersuchen. Die Beschreibung der einzelnen Modelle muß gegenüber dieser Untersuchung weitgehend in den Hintergrund treten.

---

[1] Vgl. z.B. Jonas, H.: Investitionsrechnung, Berlin 1964, S.38f.
Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von Investitionen, Köln und Opladen 1962, S.46ff.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, Tübingen 1964, S.19.

[2] C.F.W. GAUSS, der Begründer der Fehlerrechnung, wird von O. MORGENSTERN zitiert: "Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen." Morgenstern, O.: Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen, a.a.O. S.99.
Vgl. auch Pfanzagl, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik I, Sammlung Göschen Bd. 746/746a, 2. überarb. Aufl. Berlin 1964, S.200.

ERSTES KAPITEL

Das Investitionsmodell als Objekt der Untersuchung

I. Das monetäre Bild einer Investition

A. Das allgemeine Investitionsmodell

Der reale Vorgang einer Investition besteht aus einer Vielzahl wirtschaftlicher, technischer, sozialer und anderer Geschehen. Von allen realen Zusammenhängen interessiert hier nur der wirtschaftliche Aufbau. Man abstrahiert die Realität soweit, daß sie ausschließlich als wirtschaftlicher Vorgang erscheint. Durch diese Abstraktion erhält man ein Modell, das vereinfachend nur die wirtschaftlichen Größen und Verbindungen enthält[1].

Die Investitionsrechnung bemüht sich, ihre Modelle quantitativ so aufzubauen[2], daß sie im Sinne der Entscheidungsfunktionen Aussagen erbringen. Je nach der Verschiedenheit der Investitionsobjekte nehmen die Definitionsfunktionen unterschiedliche Formen an. Sie finden alle nur in der allgemeinen Definitionsfunktion eines Investitionsvorgangs zusammen.

Die betriebliche Investition besitzt ein monetäres Bild, das aus Zahlungsströmen, einem Einzahlungs- und einem Auszahlungsstrom besteht[3]. Diese Ströme enthalten sowohl stetige Abschnitte, bedingt durch Wertminderung oder -steigerung stetigen Charakters, als auch Unstetigkeitsstellen, die durch sprunghafte Veränderungen hervorgerufen werden, vgl. Figur 1 .

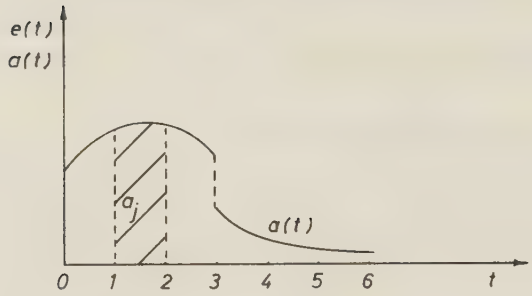
---

[1] Auf den Modellbegriff kann im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Vgl. hierzu Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, Frankfurt/Main 1963, S.13ff und die dort aufgeführte Literatur.

[2] Vgl. Sabel, H.: Die Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnungen, Berlin 1965, S.63.

[3] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.2ff. Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, a.a.O. S.123. Einzahlungen und Auszahlungen werden im folgenden den Einnahmen und Ausgaben gleichgesetzt im Gegensatz zu der Unterscheidung in der Finanzplanung. Vgl. Lücke, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie, Wiesbaden 1965, S.17ff.

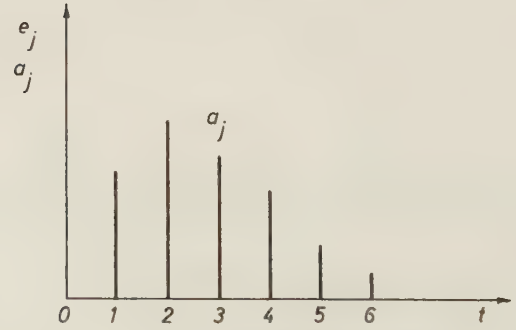
Zahlungsstrom als Funktion der Zeit



Figur 1

Zieht man zeitliche Abschnitte der Ströme an Zeitpunkten mit endlichem Abstand zusammen, so erhält man eine Folge von Impulsen, die diesen Zeitpunkten zugeordnet ein angenähertes Bild der realen Ströme abgeben. Diese Zahlungsfolge wird dem Strom äquivalent definiert[1], vgl. Figur 2 .

Zahlungsfolge als Funktion der Zeit



Figur 2

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.6ff.

Die Größe a_j eines Auszahlungsimpulses, der dem Zeitpunkt j zugeordnet wird (vgl. Figur 2), entspricht der Fläche a_j in der Figur 1 .

$$a_j = \int_{j-1}^{j} a(t)\, dt$$

Die Impulse der Einzahlungsfolge entstehen auf gleiche Art.

Die Zahlungen sind immer positiv und werden je nach ihrer Bewegungsrichtung in Bezug auf den Investor mit verschiedenen Vorzeichen gekennzeichnet - Einzahlungen sind positiv, Auszahlungen negativ.

B. Die Zinsen

Die Zeit t nimmt nicht nur eine ordnende Rolle in der Folge der Zahlungsgrößen wahr, sie ist auch eine Einflußgröße[1]. Gleiche Zahlungsgrößen, die verschiedenen Zeitpunkten zugeordnet sind, werden verschieden gewichtet[2]. Eine Geldeinheit, die später fällig wird, besitzt ein geringeres Gewicht als eine früher fällige Geldeinheit. Die zeitabhängige Wertveränderung wird durch die Verzinsung bzw. die Diskontierung vorgenommen.

Die Verzinsung erfolgt in einer von drei Formen, der Berücksichtigung einfacher Zinsen, der Berücksichtigung von Zinseszinsen oder der Momentanverzinsung. Das Unterscheidungsmerkmal dieser Verzinsungsformen bildet die Länge des vereinbarten Zeitraumes, nach dessen Ablauf die Zinsen jeweils dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst werden.

---

[1] Vgl. Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, a.a.O. S.122.

[2] Vgl. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, Köln und Opladen 1959, S.21.
Illetschko, L.L.: Betriebswirtschaftslehre für Ingenieure, Wien-New York 1965, S.225.
Stackelberg, H.v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, Tübingen-Zürich 1951, S.287ff.
Böhm-Bawerk, E.v.: Kapital und Kapitalzins, 4. Aufl. Jena 1921.

Bei einfacher Verzinsung beträgt der Zeitraum + ∞ ; Zinsen werden nie zugeschlagen.

$$K_n = K_o (1 + ni)$$

K_o = Kapitalbetrag zum Zeitpunkt 0
K_n = Kapitalbetrag zum Zeitpunkt n
i = Zinssatz in Dezimalen

In der Zinseszinsrechnung sind die Zeitabstände endlich und konstant.

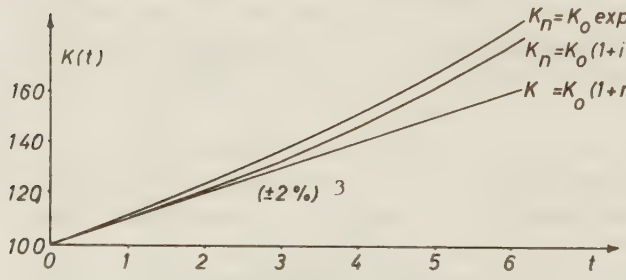
$$K_n = K_o (1 + i)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bei Momentanverzinsung werden die Zinsen stets nach unendlich kurzer Zeit zugeschlagen.

$$K_n = K_o \exp^{in} \qquad 1$$

Für alle drei Formen wird der Zinssatz in Prozenten vom Kapital für eine Zeiteinheit, meist ein Jahr, vereinbart. n bedeutet dann die Zahl der Zeiteinheiten. Ein zu einem Zinssatz

Kapitalwachstum bei verschiedener Verzinsungsart



2

Figur 3

von 10% pro Jahr angelegtes Kapital verändert sich für die drei Verzinsungsformen nach dem Verlauf in Figur 3 . Die Kreditinstitute verwenden ausschließlich

---

[1] Zur Ableitung der Formel vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.136ff.

[2] Vgl. Nicolas, M.: Finanzmathematik, Sammlung Göschen Bd. 1183/1183a, Berlin 1959, S.36.

[3] Angabe der Zeichnungsgenauigkeit.

den Zinseszins, der gewöhnlich auch in der Investitionsrechnung benutzt wird. In theoretischen Betrachtungen wird bei Ermittlung von Extrempunkten häufig die Momentanverzinsung angenommen, da sie sich der Zinseszinsfunktion gut approximieren läßt[1] und als stetige Funktion differenzierbar ist.

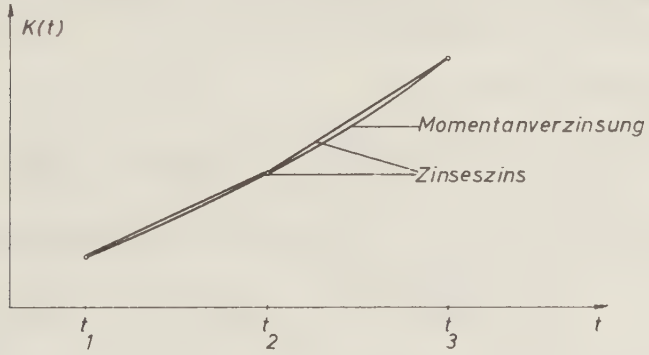
$$K_n = K_o\,(1+i)^n = K_o\,\exp^{jn} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$(1+i) = \exp^{j}$$

$$\ln(1+i) = j$$

Es existiert eine Verzinsungsintensität j für den Zinsfuß i, die bewirkt, daß sich beide Funktionen für ganzzahlige n berühren. Für gebrochene n weichen sie von einander ab, da die Zinseszinsfunktion an diesen Abschnitten linear, die Exponentialfunktion nichtlinear verläuft. Figur 4 zeigt diesen Sachverhalt.

Vergleich von Momentanverzinsung und Zinseszins



Figur 4

Damit ist die Einflußnahme der Zeit auf die Zahlungsgrößen umrissen, und die Zahlungsgrößen sollen kurz beleuchtet werden.

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.141. Nicolas, M.: Finanzmathematik, a.a.O. S.51.

C. Die Modellelemente

1. Kosten oder Ausgaben bei linearer Abschreibung?

Für die Auszahlungsreihe im Rahmen der betrieblichen Investition stellte W. LÜCKE die Frage nach dem Charakter der Elemente: Sollen Ausgaben oder Kosten verwendet werden?[1] Er beweist für einen Zeitraum von 3 und 4 Jahren, daß bei einer Berücksichtigung kalkulatorischer Zinsen entweder Ausgaben oder Kosten in der Rechnung verwendet werden können, und schließt daraus auf jede beliebige Dauer. Der allgemeine Beweis wird hier nachträglich zuerst für lineare Abschreibung durchgeführt.

Die Anschaffungsausgabe eines Objektes A_o soll zum Zeitpunkt 0 gezahlt worden sein, sie soll in den folgenden n Perioden linear auf den Wert null abgeschrieben werden. Die Abschreibungsraten A_o/n fallen zusammen mit den Zinsen z_j am Ende des Jahres j an ($j = 1, 2, 3, \ldots n$). Die Kosten am Ende des Jahres j betragen also $\frac{A_o}{n} + z_j$.

Die Behauptung lautet:

$$A_o = \frac{z_1 + \frac{A_o}{n}}{q^1} + \frac{z_2 + \frac{A_o}{n}}{q^2} + \frac{z_3 + \frac{A_o}{n}}{q^3} + \ldots + \frac{z_{n-1} + \frac{A_o}{n}}{q^{n-1}} + \frac{z_n + \frac{A_o}{n}}{q^n}$$

Darin bedeutet $q = 1 + i$; i stellt den Kalkulationszinsfuß dar. Die Zinsen berechnen sich zu:

$$z_1 = A_o i, \quad z_2 = A_o(1-\tfrac{1}{n})i, \quad z_3 = A_o(1-\tfrac{2}{n})i, \quad z_j = A_o(1-\tfrac{j-1}{n})i$$

Diese Ausdrücke werden eingesetzt:

$$A_o = \frac{A_o i + \frac{A_o}{n}}{q^1} + \frac{A_o(1-\frac{1}{n})i + \frac{A_o}{n}}{q^2} + \frac{A_o(1-\frac{2}{n})i + \frac{A_o}{n}}{q^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_o(1-\frac{n-2}{n})i + \frac{A_o}{n}}{q^{n-1}} + \frac{A_o(1-\frac{n-1}{n})i + \frac{A_o}{n}}{q^n}$$

Beide Seiten der Gleichung werden durch A_o geteilt und mit

---

[1] Vgl. Lücke, W.: Investitionsrechnungen auf der Grundlage von Ausgaben oder Kosten?, in: ZfhF, NF, 7.Jg. 1955, S.310ff.

n multipliziert.

$$n = \frac{ni + 1}{q^1} + \frac{ni - i + 1}{q^2} + \frac{ni - 2i + 1}{q^3} + \dots +$$

$$+ \frac{ni - (n-2)i + 1}{q^{n-1}} + \frac{ni - ni + i + 1}{q^n}$$

für i wird (q - 1) eingesetzt,

$$n = \frac{(q-1)n + 1}{q^1} + \frac{(q-1)n - (q-1) + 1}{q^2} + \frac{(q-1)n-2(q-1)+1}{q^3} + \dots +$$

$$+ \frac{(q-1)^2 + 1}{q^{n-1}} + \frac{(q-1) + 1}{q^n}$$

Die Brüche werden weiter auseinandergezogen, indem man jeden Summanden[1] der Zähler auf einen getrennten Bruchstrich schreibt.

$$n = \frac{qn}{q^1} - \frac{n}{q^1} + \frac{1}{q^1} + \frac{nq}{q^2} - \frac{n}{q^2} - \frac{q}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} +$$

$$+ \frac{nq}{q^3} - \frac{n}{q^3} - \frac{2q}{q^3} + \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^3} + \dots +$$

$$+ \frac{2q}{q^{n-1}} - \frac{2}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{q}{q^n} - \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^n}$$

Die Brüche werden gekürzt und gruppiert:

$$n = n + \left[- \frac{n}{q^1} + \frac{1}{q^1} + \frac{n}{q^1} - \frac{1}{q^1} - \frac{n}{q^2} + \frac{2}{q^2} + \frac{n}{q^2} - \frac{2}{q^2} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{n}{q^3} + \frac{3}{q^3} + \frac{n}{q^3} - \dots + \frac{2}{q^{n-2}} \right] - \frac{2}{q^{n-1}} + \frac{2}{q^{n-1}} - \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^n} \right]$$

Die Addition aller Glieder in der eckigen Klammer ergibt null.

$$\underline{n = n}$$

Die behauptete Gleichheit von Ausgaben und Kosten besteht also bei Berücksichtigung des kalkulatorischen Zinses[2].

---

[1] Ein Subtrahend ist ein negativer Summand, a-b = a + (-b).

[2] Vgl. auch Sabel, H.: Die Grundlagen ....., a.a.O. S.105ff.

2. Kosten oder Ausgaben bei nichtlinearer Abschreibung?

Die buchmäßige Abschreibung und auch die effektive Wertminderung vieler Anlagegüter nimmt einen nichtlinearen Verlauf. Damit erhebt sich die Frage, ob für jeden Verlauf die Äquivalenz gezeigt werden kann.

$$A_o = \frac{z_1 + k_1}{q^1} + \frac{z_2 + k_2}{q^2} + \frac{z_3 + k_3}{q^3} + \ldots + \frac{z_{n-1} + k_{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{z_n + k_n}{q^n}$$

A_o = Anschaffungsausgaben
z_j = kalkulatorische Zinsen für das Jahr j
k_j = Abschreibungsbetrag oder Wertminderung für das Jahr j

Es gilt $A_o = \sum_{j=1}^{n} k_j \qquad (k_o = 0)$

Die Zinsen betragen im Jahre j : $z_j = (A_o - \sum_{l=1}^{j} k_{l-1})i$

Dieser Ausdruck wird in die Gleichung für A_o eingesetzt:

$$A_o = \frac{A_o i + k_1}{q^1} + \frac{A_o i - k_1 i + k_2}{q^2} + \frac{A_o i - (k_1+k_2)i + k_3}{q^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_o i - (k_1+\ldots+k_{n-2})i + k_{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{A_o i - (k_1+\ldots+k_{n-1})i + k_n}{q^n}$$

Ersetzt man i durch $q-1$ und A_o auf der rechten Seite durch $\sum_{j=1}^{n} k_j$ und gruppiert in etwas anderer Weise, so lautet der nächste Ausdruck:

$$A_o = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(q-1)}{q^1} + \frac{(k_2 + k_3 + \ldots + k_n)(q-1)}{q^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{(k_{n-1}+k_n)(q-1)}{q^{n-1}} + \frac{k_n(q-1)}{q^n} + \frac{k_1}{q^1} + \frac{k_2}{q^2} + \frac{k_3}{q^3} + \ldots + \frac{k_n}{q^n}$$

Werden die Brüche im ersten Teil der rechten Seite der Gleichung ausmultipliziert und gekürzt, so heben sie sich gegenseitig soweit auf, daß der Rest folgendermaßen lautet:

$$A_o = k_1 + k_2 + \ldots + k_n - \frac{k_1}{q^1} - \frac{k_2}{q^2} - \frac{k_3}{q^3} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{k_n}{q^n} + \frac{k_1}{q^1} + \frac{k_2}{q^2} + \frac{k_3}{q^3} + \ldots + \frac{k_n}{q^n}$$

Die rechte Seite ergibt A_o, da $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ so definiert war und der Rest fortfällt.

$$\boxed{A_o = A_o}$$ quod erat demonstrandum.

Die Aussage W. LÜCKEs gilt somit für alle Arten der Abschreibung[1]. Bei der Berücksichtigung kalkulatorischer Zinsen ist es gleichgültig, ob Kosten oder Ausgaben in das Modell aufgenommen werden[2]. Auch wenn die Wahl zwischen Ertrag und Einnahmen getroffen werden soll, bewirken die kalkulatorischen Zinsen eine Gleichstellung von beiden[3]. Daher sollen auch im Folgenden je nach Art und Charakter des Modells Einnahmen und Ausgaben oder Kosten und Erträge verwendet werden, ohne daß die Wahl der Elemente noch weiter begründet wird.

---

[1] Vgl. Lücke, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie, Wiesbaden 1965, S.48 und S.167ff.
Lücke, W.: Die kalkulatorischen Zinsen im betrieblichen Rechnungswesen, in: ZfB 35.Jg.1965, Ergänzungsheft, S.20ff.

[2] Aus einer Umfrage über die Investitionsentscheidungen industrieller Unternehmungen kann man entnehmen, daß die Mehrzahl der Unternehmer eher Kosten als Ausgaben für die Rechnungen wählt. Vgl. Gutenberg, E.: Untersuchungen über die Investitionsentscheidungen industrieller Unternehmen, Köln und Opladen 1959.

[3] Vgl. Philipp, F.: Unterschiedliche Rechnungselemente in der Investitionsrechnung, in: ZfB. 30.Jg. 1960, S.26ff.

D. Die isolierte Untersuchung einer Investition

Wie schon erwähnt, besteht der wirtschaftliche Aufbau einer Investition aus einer zeitlich gegliederten Folge von Einnahmen und Ausgaben.

[1]

Zeitpunkte:	t_o	t_1	t_2	$t_3 \cdots t_n \cdots$	
Einnahmen :	e_o	e_1	e_2	$e_3 \cdots e_n \cdots$	
Ausgaben :	$-a_o$	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3 \cdots -a_n \cdots$	

Die Einnahmen und Ausgaben dieser Folge sollen allein von der betrachteten Investition verursacht sein und gleichzeitig alle verursachten Einnahmen und Ausgaben umfassen. Diese Forderung wirft für den praktischen Ansatz einige Probleme auf, da mitunter verschiedene betriebliche Investitionsgüter miteinander wirtschaftlich verbunden sind. Es gilt dann, eine einzelne Investition aus diesem Verband zu lösen und gedanklich zu isolieren oder ein Modell für den gesamten Verband zu bilden[2].

Interdependenzenschema einer Investition

Figur 5

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.17.
Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, a.a.O. S.123.

[2] Es bestehen bereits zahlreiche Ansätze zur simultanen Berechnung ganzer Investitionsprogramme, die einem großen Teil der Interdependenzen Rechnung tragen. Siehe hierzu vor allem:
Albach, H.: Investition und Liquidität, Wiesbaden 1962.
Jacob, H.: Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: ZfB 34.Jg. 1964 H.7 und 8.
Swoboda, P.: Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research, in: ZfB 31.Jg.1961, S.96ff.
Swoboda, P.: Die simultane Planung von Rationalisierungs- und Erweiterungsinvestitionen und von Produktionsprogrammen, in: ZfB 35.Jg. 1965, H. 3, S.148ff.

Man kann zwischen sachlichen und zeitlichen Interdependenzen unter Investitionsgütern unterscheiden. Sachliche Interdependenzen bestehen zwischen Investitionsgütern, wenn die Durchführung einer Investition die Einnahmen- und Ausgabenfolge eines anderen Investitionsgutes verändert oder wenn diese Folge einer Investition von der Einnahmen- und Ausgabenfolge eines bestehenden Investitionsgutes abhängt (vgl. Figur 5). Die isolierte Betrachtung einer einzelnen Investition hat allen Interdependenzen mit anderen Objekten Rechnung zu tragen, indem die verursachten Einnahmen- und Ausgabenänderungen dieser anderen Objekte berücksichtigt werden.

Eine zeitliche Interdependenz besteht zwischen Investitionsobjekten, wenn zeitlich früher oder später existierende Objekte auf die Einnahmen- und Ausgabenfolge einer Investition Einfluß besitzen. Ein solcher Einfluß kann sich auf die zeitliche Länge der Folge, die Nutzungsdauer, oder ihre Elemente erstrecken. Eine korrekte zeitliche Isolierung einer Investition müßte alle zeitlich verschobenen Einflußgrößen für die gesamte Lebensdauer des Betriebes berücksichtigen.

Die einzelnen Investitionsmodelle der traditionellen Betrachtungsweise bauen auf isolierten Investitionen auf. Die bestehenden Modelle unterstellen stillschweigend, daß die Isolierung stets vollständig gelingt und die Modellelemente genau quantifiziert werden können. Die nachfolgende Untersuchung versucht, die bestehenden Modelle so zu erweitern, daß die Auswirkungen von Abweichungen der Modellelemente erfaßt werden können.

II. Die Zielfunktion der Unternehmung als Einteilungskriterium für die Investitionsmodelle

Die Entscheidung über die Durchführung eines Investitionsvorhabens hängt von der Zielsetzung des Unternehmers ab, einer wirtschaftlichen Vorstellung, deren Verwirklichung vom Unternehmer angestrebt wird. Von allen denkbaren Zielvorstellungen[1] berücksichtigt die Investitionsrechnung nur monetäre Zielfunktionen:

1. Gewinnmaximierung
2. Maximierung der Zinsen auf das Eigenkapital
3. Maximierung des Betriebskoeffizienten[2] (Betriebsertrag/Kosten)
4. Maximierung der Gesamtkapitalrentabilität
5. Maximierung des internen Zinsfußes
6. Minimierung der Kapitalrückflußdauer (Pay-off-time)

Die Gewinnmaximierung entspricht der Kapitalwertmaximierung. Die Ausgaben am Ende einer jeden Periode werden von den Einnahmen des gleichen Zeitpunktes abgezogen und diese Differenz diskontiert, oder die Reihen werden einzeln diskontiert und danach von einander subtrahiert. Die Summe der diskontierten Differenzen bildet den Kapitalwert C der Investition.

$$C = (e_o - a_o) + (e_1 - a_1)q^{-1} + (e_2 - a_2)q^{-2} + \ldots$$

$$\ldots + (e_n - a_n)q^{-n} = E - A$$

e = Einnahmen
a = Ausgaben
E = Barwert aller Einnahmen
A = Barwert aller Ausgaben

---

[1] Vgl. Heinen, E.: Die Zielfunktion der Unternehmung, in: Zur Theorie der Unternehmung (Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg), Wiesbaden 1962, S.9ff.
Lücke, W.: Investitionsrechnung, aber wie?, in: Der Volkswirt Nr. 5 1965, S.153
Lutz, F. und V.: The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951, S.16f.

[2] Vgl. Lohmann, M.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 4. neubearb. Aufl. Tübingen 1964, S.232.

Die Maximierung der Zinsen für das Eigenkapital entspricht der Gewinnmaximierung[1], wenn man das Eigenkapital als konstante Größe betrachtet. Da die einzelne Investition isoliert betrachtet wird, stellen die Gesamtkosten gleichzeitig das Gesamtkapital dar. Bei konstantem Eigenkapitalanteil stellt die Maximierung der Gewinne gleichzeitig die Maximierung der Eigenkapitalrentabilität und der Zinsen auf das Eigenkapital dar.

Der Betriebskoeffizient als Verhältnis von Ertrag zu Kosten läßt sich als Funktion einer beliebigen unabhängigen Variablen x beschreiben.

$$B(x) = \frac{E(x)}{A(x)}$$

Die erste Ableitung durchläuft an der Stelle, wo das Maximum liegt, den Wert Null.

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{E'(x)A(x) - A'(x)E(x)}{A^2(x)} = 0$$

Das Maximum liegt über dem Wert der unabhängigen Variablen x, für den $\frac{E'(x)}{E(x)} = \frac{A'(x)}{A(x)}$ ist.

Da für die isoliert betrachtete Investition Kosten und eingesetztes Gesamtkapital entsprechen, läßt sich die Gesamtkapitalrentabilität $R(x)$ in Analogie zum Betriebskoeffizienten beschreiben:

$$R(x) = \frac{E(x) - A(x)}{A(x)} = \frac{E(x)}{A(x)} - 1$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach x zeitigt das gleiche Maximumkriterium wie für den Betriebskoeffizienten[2]. Die Maximie-

---

[1] Vgl. Lücke, W.: Investitionsrechnung, aber wie? a.a.O. S.153.
Lutz, F. und V.: The Theory of Investment...,a.a.O. S.20f.
Pack, L.: Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, in: Zur Theorie der Unternehmung, Wiesbaden 1962, S.94ff.

[2] Die Maximierungskriterien für einige Rentabilitäten und den Betriebskoeffizienten als Funktion der Ausbringung wurden in der Literatur schon an einigen Stellen abgeleitet.
Vgl. Pack, L.: Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, a.a.O. S.73ff.
Gerbel, B.M.: Rentabilität, Wien 1955, S.81ff.
Pack, L.: Rationalprinzip und Gewinnmaximierungsprinzip, in: ZfB 31.Jg. 1961, S.207ff und 283ff.
Lücke, W.: Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie, a.a.O. S.239f und 261f.

rung des Betriebskoeffizienten entspricht der Maximierung der Gesamtkapitalrentabilität[1].

Der interne Zinsfuß[2] einer Investition ist als der Zinsfuß definiert, der den Barwert der Ausgabenreihe dem der Einnahmenreihe angleicht.

$$e_o(1+r)^o + e_1(1+r)^{-1} + e_2(1+r)^{-2} \ldots + e_n(1+r)^{-n} =$$

$$= a_o(1+r)^o + a_1(1+r)^{-1} + a_2(1+r)^{-2} \ldots + a_n(1+r)^{-n}$$

$$(e_j \geqq 0)$$

$$E = A \qquad (a_j \geqq 0)$$

Wenn die Zielvorstellung fordert, daß bei der Durchführung eines Investitionsvorhabens der interne Zinsfuß zu maximieren ist, so gilt diese Forderung für Zahlungsreihen vom Typ I[3]. Für diesen Typ, dessen Kennzeichen darin besteht, daß das Zeitzentrum der Auszahlungsreihe vor dem der Einzahlungsreihe liegt, entspricht die Maximierung des internen Zinsfußes auch der Maximierung des Betriebskoeffizienten bzw. der Kapitalrentabilität. Für den Fall des stetigen Kapitaleinsatzes wird der Beweis hierfür bei F. und V. LUTZ geführt[4].

Die Minimierung der Kapitalrückflußdauer kann mit der Erfüllung der anderen Zielfunktionen zusammenfallen, oder aber auch als Entscheidungskriterium für sich stehen.

In der folgenden Untersuchung können die Modelle nach Zielfunktionen zusammengefaßt werden zu Modellen für:

1. Maximierung des Gewinnes
2. Maximierung der Gesamtkapitalrentabilität oder des internen Zinsfußes
3. Minimierung der Kapitalrückflußdauer.

---

[1] Zum gleichen Ergebnis gelangen auch F. und V. Lutz.
Vgl. Lutz, F. und V.: The Theory of Investment...,a.a.O. S.20f.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, 2. Aufl. Meisenheim 1963, S.64.

[2] Vgl. Boulding, K.E.: Time and Investment, in Economica Vol.III 1936, S.200ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.10f.

[3] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.11.

[4] Vgl. Lutz, F. und V.: The Theory of Investment...,a.a.O. S.19f.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie..,a.a.O.S.64.
Seelbach, H.: Entscheidungskriterien der Wirtschaftlichkeitsrechnung, in: ZfB 35 Jg. 1965, S.302ff.

III. Die Berücksichtigung ein- und mehrwertiger Erwartungen in der Investitionsrechnung

Die wirtschaftlichen Elemente der betrieblichen Investitionen bestehen aus konkreten Größen, die mit begrenzter Genauigkeit gemessen werden können. Die Investitionsmodelle setzen Werte an die Stelle dieser Größen, die man als Erwartungen bezeichnen kann. Erwartungen sollen in Anlehnung an die Formulierung ALBACHs als gegenwärtige Vorstellungen über wirtschaftliche Verhältnisse definiert werden[1]. Der rein zeitlichen Beziehung ALBACHs wird hier noch die sachliche Beziehung hinzugefügt. Eine Erwartung stellt sowohl die geistige Vorwegnahme eines zukünftigen Ereignisses als auch das Erkennen, das geistige Messen, einer gegenwärtigen Situation als auch die geistige Vorwegnahme und gleichzeitig das Erkennen eines zukünftigen Ereignisses dar.

Die Erwartungen unterteilen sich nach der Bestimmtheit ihrer Verifikation in einwertige und mehrwertige Erwartungen. In Anlehnung an ALBACHs Definitionen läßt sich zusammenfassend definieren[2]:
Sichere Erwartungen und Risikoerwartungen zählen zu den einwertigen, objektiv unsichere und subjektiv unsichere zu den mehrwertigen Erwartungen.

Sichere Erwartungen liegen vor, wenn die Voraussicht und das Erkennen vollkommen sind[3]. Weichen die tatsächlichen Ereignisse von den erwarteten ab und lassen sich die Abweichungen berechnen, so spricht man von Risikoerwartungen[4].

---

[1] Vgl. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.1f.

[2] Vgl. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.3f.

[3] Vgl. Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, Köln und Opladen 1959, S.18ff.

[4] Vgl. hierzu auch Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 2.Bd., Der Absatz, 5. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S.50ff.
Sabel, H.: Die Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnungen, a.a.O. S.44ff.

Für objektiv unsichere Erwartungen können die Ereignisse innerhalb eines bestimmten Bandes von Werten eintreten, ohne daß Anhaltspunkte für die Wahrscheinlichkeit des getroffenen Wertes existieren. Subjektiv unsichere Erwartungen liegen vor, wenn der Unternehmer auf Grund seiner Erfahrungen verschiedenen zukünftigen Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Von einer willkürlichen Zuordnung soll abgesehen werden.

Ob ein Individuum die Erwartung, die es über ein Ereignis hegt, als sicher oder unsicher bezeichnet, hängt von der Information ab, die das Individuum über das Eintreffen des Ereignisses besitzt.

Zu einem vorgegebenen Ereignis gehört eine bestimmte Menge Informationen, mit deren Hilfe sich Wert und Zeit seines Eintreffens genau ermitteln lassen. Diese Informationen werden notwendige Informationen genannt[1]. Zwischen dem Ereignis und der Umwelt besteht ebenso wie zwischen der Umwelt und dem Individuum ein zeitlicher oder ein räumlicher Abstand, über den die Informationen weitergegeben werden müssen. Das Ereignis wird gewissermaßen auf die Umwelt und weiter auf den Betrachtungsort des Individuums projeziert. Die Projektion vernichtet oft einen Teil der Informationen. Diese Projektion des Ereignisses auf die sachliche und zeitliche Umwelt entzieht sich der menschlichen Einflußnahme. Aus dieser Übertragung resultieren die in der Umwelt existierenden Informationen, die kurz 'existierende' Informationen genannt werden sollen[2].

Die Informationsübertragung von der Umwelt auf das Individuum kann beeinflußt werden. Als Übertragungsmedien dienen technische Hilfsmittel, wie Meßinstrumente und Nachrichtenaggregate, und abstrakte Hilfsmittel, wie Formeln und Modelle. Das Individuum besitzt die Möglichkeit, zur Erlangung eines mehr oder mindergroßen Teils der existierenden Informationen unter verschiedenen Kombinationen der Übertragungsmedien zu wählen.

---

[1] Vgl. Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, a.a.O. S.24.

[2] Vgl. den Begriff der technisch möglichen Information bei WITTMANN, siehe Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, a.a.O. S.24f.

Es erhält die individuellen Informationen[1].

Sichere Erwartungen liegen vor, wenn die individuellen, die existierenden und die notwendigen Informationen gleich sind. Die Erwartung zählt zu den Risikoerwartungen, wenn die individuellen Informationen ausreichen, um eine Mehrzahl möglicher Werte des Ereignisses und die Gesetzmäßigkeit oder die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens zu bestimmen. Mehrwertige Erwartungen liegen vor, wenn die individuellen Informationen einen so kleinen Teil der notwendigen Informationen ausmachen, daß auf eine Mehrzahl von möglichen Werten des Ereignisses geschlossen werden muß, ohne daß dem Eintreten der Werte eine Gesetzmäßigkeit oder eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

Bei objektiv unsicheren Erwartungen existieren in der Umwelt entsprechend wenige Informationen, bei subjektiv unsicheren Erwartungen besitzt das Individuum wenige Informationen. So kann wegen einer ungenügenden Übertragung die Erwartung eines Individuums subjektiv unsicher sein, obwohl die existierenden Informationen für eine sichere Erwartung genügen. Die objektive Unsicherheit bedingt bei dieser Betrachtungsweise eine subjektive Unsicherheit, weil die individuellen Informationen nicht umfangreicher als die existierenden sein können.

Die Planung von betrieblichen Investitionen muß auf Informationen über Ereignisse aufbauen, die in einen zeitlichen und sachlichen Abstand zum planenden Individuum liegen[2]. Das Individuum erhält seine individuellen Informationen durch messen, schätzen und rechnen. Sie sind nur im Ausnahmefall vollkommen und die Erwartung daher im Regelfall unsicher.

Für die Lösung der Investitionsprobleme bei mehrwertigen Erwartungen wurden besonders in den letzten beiden Jahrzehnten

---

[1] Vgl. Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, a.a.O. S.24ff.

[2] Einen zeitlichen Abstand zum Planer besitzen beispielsweise zukünftige Erträge und Kosten, einen sachlichen Abstand die gegenwärtigen Erträge und Kosten, die erst erkannt und in ihrer Höhe festgestellt werden müssen.

einige Ansätze entwickelt[1]. Diese Ansätze eignen sich jedoch mehr für die Berechnung der Gesamtinvestition im Rahmen der unternehmerischen Gesamtplanung bei mehrwertigen Erwartungen als für Entscheidungen über isolierte betriebliche Investitionen.

Die Wirtschaftlichkeitsrechnung für isolierte betriebliche Investitionen geschah bisher in der Literatur hauptsächlich unter der Voraussetzung sicherer Erwartungen. Diese Voraussetzung entspricht nicht den realen Gegebenheiten, denn die Werte einiger Ereignisse, die als Elemente in die Modelle für sichere Erwartungen eingehen, sind unsicher. Die Werte dieser Modellelemente sind meistens innerhalb einer bestimmten Bandbreite unsicher. Solange diese Bandbreite ein gewisses Maß nicht überschreitet, besteht die Möglichkeit, die Modelle für sichere Erwartungen zu verwenden, wenn der begrenzten Unsicherheit Rechnung getragen wird.

Unsichere Werte, die innerhalb eines bestimmten Bereiches schwanken können, lassen sich durch einen Wert in diesem Bereich und die Schwankungsbreite um diesen Wert angeben. Solange der Schwankungsbereich relativ klein ist, bietet sich die Fehlerrechnung für den Umgang mit solchen begrenzt unsicheren Werten an. Welche Voraussetzungen die bestehenden Investitionsmodelle für sichere Erwartungen an die Schwankungsbreite der einzelnen Eingangsgrößen stellen, kann ermittelt werden, wenn die Empfindlichkeit der Aussagen gegenüber kleinen Änderungen der Eingangsgrößen bekannt ist.

Die vorliegende Untersuchung will die bestehenden Investitionsmodelle analysieren, nötigenfalls erweitern, Verbindungen zwischen verschiedenen Modellen aufzeigen und die Modellaussagen durch eine Fehlerrechnung auf ihre Empfindlichkeit gegenüber kleinen Schwankungen der Eingangsgrößen untersuchen.

---

[1] Vgl. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.119ff.
Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 2. Bd. Der Absatz, a.a.O. S.53ff.
Wittmann, W.: Unternehmung und unvollkommene Information, a.a.O. S.38ff.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, Tübingen 1964,S.89ff.
Vgl. auch die in diesen Veröffentlichungen angegebene Literatur.

ZWEITES KAPITEL

Das Rechnen mit fehlerbehafteten Größen

I. Präzise und gerundete Zahlen

Die Modelle betrieblicher Investitionen enthalten Elemente, die als gemessene Werte in die Rechnung aufgenommen werden, so zum Beispiel verbrauchte Betriebsstoffe in Liter, kg, kW oder m^3, gefertigte Produkte in Meter, Tonnen, Stück und ähnlichen Mengen- oder Raummaßen. Ein Teil der gemessenen Werte kann auch bei beliebig großem Meßaufwand nur begrenzt genau festgestellt werden[1] und unterscheidet sich somit von den exakten Maßen.

Im Gegensatz zu den Werten begrenzter Genauigkeit spricht man von unbegrenzter Genauigkeit, wenn die Näherung beliebig verfeinert werden kann. Der Dezimalbruch für 1/3 = 0,33... läßt sich zum Beispiel beliebig seinem wahren Wert annähern. Die beschriebenen Werte mit begrenzter Genauigkeit besitzen gegenüber den präzisen Größen einen Fehler. Mathematische Modelle und Formeln, wie z.B. die Investitionsmodelle, enthalten Symbole, die als präzise Größen aufzufassen sind, und erst die numerische Rechnung unterliegt dem Einfluß der Fehler.

Um die Genauigkeit einer Zahl abschätzen zu können, sind Rundungsregeln geschaffen worden, die eine einheitliche Behandlung von Näherungswerten erwirken wollen[2].

---

[1] Vgl. Schrutka, L.: Elemente der höheren Mathematik, 7.Aufl. Wien 1948, S.3.
Löffelbein, K.: Kompendium der mathematischen Wirtschaftstheorie, I.Bd. Die mathematischen Grundlagen und die mathematische Statistik für Volks- und Betriebswirte, Wiesbaden 1959, S.25f.
Rummel weist auf die Schwierigkeiten der Bestimmung der Stoff-, Lohn- und Zeitmengen hin. Vgl. Rummel, K.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, Bericht Nr. 109 des Ausschusses für Betriebswirtschaft des Vereins deutscher Eisenhüttenleute, in: Archiv für das Eisenhüttenwesen 10.Jg.1936, H.2, S.73.

[2] Vgl. Deutsche Normen, DIN 1333, Runden von Zahlen, Regeln-Kennzeichnung, Berlin W und Köln 1958, Deutsche Normen, DIN 1333 Runden von Dezimalzahlen, Entwurf 1965.

Enthält ein Näherungswert überflüssige oder unsichere Dezimalen, so soll er soweit auf- oder abgerundet werden, daß er nur noch genau gegebene Dezimalen zeigt[1]. Der Fehler der gerundeten Zahl soll eine Einheit der letzten rechtsstehenden Dezimalen nicht überschreiten.

Eine Zahl des Dezimalsystems kann auf folgende Weise dargestellt werden:

$$x = \pm (a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \ldots + a_m 10^{n-m+1} + \ldots)$$

Darin bedeuten die a_j die Ziffern ($10 > a_j \geqq 0$, $a_1 > 0$), während die zugehörige Zehnerpotenz die Dezimalstelle der Ziffer innerhalb der Zahl kennzeichnet. Um die Zahl x nach m Stellen zu runden, betrachtet man den wegfallenden Teil f.

$$f = \pm (a_{m+1} 10^{n-m} + a_{m+2} 10^{n-m-1} + \ldots) \qquad (1)$$

Die Größe dieses wegfallenden Teils bildet die Richtlinie für die Behandlung der letzten bleibenden Ziffer[2]. Befindet sich der Wert von f im Intervall zwischen 0 und $0{,}5 \cdot 10^{n-m+1}$, ohne den Wert $0{,}5 \cdot 10^{n-m+1}$ zu erreichen, so wird er einfach vernachlässigt. Die letzte geltende Ziffer bleibt unverändert. Beträgt der wegfallende Teil $f = 0{,}5 \cdot 10^{n-m+1}$ oder mehr, so erhöht sich die letzte geltende Ziffer um eine Einheit.

Die angegebenen Ziffern einer Zahl nennt man geltende, gültige, tragende oder signifikante Ziffern. Alle Ziffern außer der Null sind signifikant[3].

---

[1] Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, 6. Aufl. Moskau 1956, Deutsche Übersetzung von Ziegler, V., Leipzig, 3.Aufl. Frankfurt/Main 1962, S.96f. Morgenstern, O.: Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen, 2. neu bearb. und erw. Aufl. Wien - Würzburg 1965, S.61ff.

[2] Vgl. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, Zürich und Frankfurt/Main 1964, S.9ff.
Deutsche Normen, DIN 1333, 1958, a.a.O.
Deutsche Normen, DIN 1333, Entwurf 1965, a.a.O.

[3] Vgl. Wagenführ, R.: Statistik leicht gemacht, Köln 1963, S.29.

2455,3654 besitzt acht signifikante Ziffern.

Nullen zählen immer als signifikante Ziffern, wenn sie von anderen Ziffern eingeschlossen werden oder als letzte Ziffern rechts vom Komma angeordnet sind.

1002,00 besitzt sechs signifikante Ziffern.

Erfüllen Nullen nur die Aufgabe Dezimalstellen anzuzeigen, - sie stehen entweder als letzte Ziffern links vor dem Komma oder bei Zahlen mit einem Betrag kleiner als 1 als erste Ziffern rechts hinter dem Komma - , so sind sie nicht signifikant[1].

1200 und 0,043 besitzen zwei signifikante Ziffern.

II. Die Klassifikation der Fehler

Die Abweichung einer gemessenen oder berechneten Größe von dem wahren Wert der Größe ist als absoluter Fehler definiert[2].

$$f_j = x_j - x_{wj} \qquad (2)$$

x_{wj} = wahrer Wert
x_j = Näherungswert
f_j = Fehler des Näherungswertes

Der absolute Fehler heißt positiv, wenn der Näherungswert den wahren Wert übersteigt, im umgekehrten Falle ist der Fehler negativ[3]. Der Quotient aus absolutem Fehler und wah-

---

[1] Einige Autoren kennzeichnen unsichere Ziffern und nichtsignifikante Nullen durch besondere Schreibweise, vergl. hierzu: Pfanzagl, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik I, Sammlung Göschen Bd. 746/746a, 2. neu bearb. Auflage, Berlin 1964, S.192.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.15.

[2] Vgl. Hänsel, H.: Grundzüge der Fehlerrechnung, Berlin 1965, S.10.
Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum (Repetitorium des Ingenieurwissens) Essen 1963, S.25.

[3] Einige Autoren definieren den absoluten Fehler auch als Differenz $x_{wj} - x_j$, es kann dadurch Vorzeichenverschiebungen geben.
Vgl. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.12.
Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichsrechnung, 2.Aufl.1961.
Meyers Großer Rechenduden, Mannheim 1961, S.165

rem Wert der Größe wird relativer Fehler genannt[1].

$$f_{rj} = \left|\frac{f_j}{x_{wj}}\right| = \left|\frac{x_j - x_{wj}}{x_{wj}}\right| \qquad (x_{wj} \neq 0) \qquad (3)$$

Bei der Durchführung mehrerer Messungen oder Schätzungen empfiehlt es sich, die Fehlergrenzen zu suchen, das sind die absoluten Größtfehler, und sie für spätere Rechnungen als Schwankungsbreite zu beachten.

Die Fehler unterteilen sich nach ihrer Ursache in systematische und zufällige Fehler[2]. Systematische Fehler entstehen durch Maßstabverzerrungen, vernachlässigte Nebenbedingungen und gegebenenfalls durch falsche Angaben[3]. Sie besitzen unter gleichen Bedingungen einen konstanten Wert. Zufällige Fehler beruhen hauptsächlich auf der Unvollkommenheit der menschlichen Sinnesorgane, darunter fällt auch Ungeschicklichkeit und mangelndes Wissen, und auf der Unzulänglichkeit der Meßinstrumente. Sie treten mit beiden Vorzeichen in gleicher Häufigkeit auf und verteilen sich in der Form einer Glockenkurve nach C.F. GAUSS um den Fehler null.

Die Elemente der Investitionsmodelle bestehen aus einer Mischung von Größen, die ihrerseits auf vielfältige Art ermittelt und zusammengesetzt sind. Sie enthalten daher zufällige und systematische Fehler in unbekannter Mischung.

---

[1] Vgl. Hänsel, H.: Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.10.
Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.29.
An einigen Stellen findet man auch den relativen Fehler als Verhältnis von absolutem Fehler zum Näherungswert definiert. Die Abweichungen zwischen beiden Definitionen sind für kleine Fehler gering.
Vgl. Sommer, F.: Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S.8.
Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch...a.a.O.S.96.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.13.

[2] Vgl. Hänsel, H.: Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.12.
Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.23.
Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 3.durchg.Aufl.Berlin 1965, S.420.
Meyers Großer Rechenduden, a.a.O. S.165.
Pfanzagl,J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik I, a.a.O. S.199.

[3] Vgl. Löffelbein, K.: Kompendium..... a.a.O. S.26f.
Morgenstern, O.: Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen, a.a.O. S.16ff.

Die Fehler können nach der Art ihres Auftretens noch einer zweiten Gliederung unterworfen werden. Man unterscheidet Eingangs-, Verfahrens-, Rechnungs- und Gesamtfehler[1].

Die Eingangsfehler haften den Größen an, die als Elemente in das Modell aufgenommen werden. Die Verfahrensfehler entstehen durch die Tatsache, daß das Modell oder ein Teil von ihm Unterschiede gegenüber der Wirklichkeit aufweisen. Vereinfachungen im Modell gegenüber einer komplizierten Realität, die das Modell nachzuahmen sucht, führen zu Verfahrensfehlern. Auch Lösungsmethoden für stetige Funktionen über Reihenentwicklungen verursachen gegebenenfalls solche Fehler. Der Rechnungsfehler entsteht durch notwendige Abrundungen numerischer Werte während des Rechenvorganges, durch Unvollkommenheit der Rechenhilfen und dadurch, daß bei der numerischen Rechnung nicht genügend auf den fehleroptimalen Weg geachtet wird. So kann ein Gleichungssystem beispielsweise durch Anwendung von Determinanten oder eines Matrizenkalküls gelöst werden. Die Wahl des Lösungsverfahrens beeinflußt den Rechnungsfehler.

Der Gesamtfehler schließlich tritt in der numerischen Lösung des Problems auf. Er ist die Abweichung des Resultates von seinem wahren Wert. Seine Ursache liegt in dem Zusammenwirken der drei genannten Fehler mit der Funktion. Die Fehlerrechnung versucht, den Gesamtfehler abzuschätzen und so zu analysieren, daß seine Ursachen möglichst bekämpft werden können[2].

Für die Verfolgung der Eingangsfehler durch einfache mathematische Funktionen können Rechenregeln entwickelt werden, wenn man Verfahrens- und Rechnungsfehler aus der Untersuchung ausschließt. Diese Rechenregeln erlauben ein leichteres Abschätzen des Gesamtfehlers. Der Fehler dieses geschätzten Fehlers kann generell vernachlässigt werden.

---

[1] Vgl. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.16ff.

[2] Vgl. Westphal, W.W.: Physikalisches Praktikum, Braunschweig 1961, S.11.

III. Die Fortpflanzung absoluter und relativer Fehler

A. Der Fehler einer Summe und einer Differenz

Die Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ bestehen aus den präzisen Werten $x_{w1}, x_{w2}, x_{w3}, \dots x_{wn}$ und den Abweichungen $+f_1, +f_2, +f_3, \dots +f_n$. Bildet man die Summe y der Näherungswerte, so kann man sie so umordnen, daß die exakten Werte x_{wj} vorne stehen und dahinter die Fehler f_j.

$$y = y_w + f_y = x_{w1} + x_{w2} + \dots + x_{wn} + f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

Der absolute Fehler einer Summe ergibt sich durch Addition aller Fehler der einzelnen Summanden[1].

$$\boxed{f_y = \sum_{j=1}^{n} f_j} \qquad (4)$$

Den relativen Fehler f_{ry} der Summe findet man aus dem Verhältnis des absoluten Fehlers zu der Summe[2].

$$f_{ry} = \left| \frac{f_y}{y} \right| = \frac{|f_1| + |f_2| + \dots + |f_n|}{y}$$

Für jeden der Eingangsfehler ergibt sich ein relativer Fehler f_{rj} durch den gleichgearteten Rechengang.

$$f_{rj} = \frac{|f_j|}{x_j}, \quad \text{also ist} \quad f_j = f_{rj} x_j$$

In der betrieblichen Realität schätzt der Techniker oder Kaufmann einige Größen in der Weise, daß er mit dem geschätzten Wert eine prozentuale Toleranz angibt. Daher erwächst die Notwendigkeit, den relativen Gesamtfehler auch als Ausdruck

---

[1] Vgl. Sommer, F.: Einführung in die Mathematik..., a.a.O. S.8f. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.18. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch..., a.a.O. S.97.

[2] Wenn die Summanden nur als Meßwert mit einer Toleranz gegeben sind, bleibt der wahre Wert der Summe unbekannt. Der relative Fehler wird dann einfacher als Quotient aus absolutem Fehler und Näherungswert statt wahrem (dann also unbekanntem) Wert berechnet.

der relativen Einzelabweichungen zu entwickeln.

$$f_{ry} = \frac{f_{r1}x_1 + f_{r2}x_2 + \dots + f_{rn}x_n}{y}$$

Eine kleine Umformung dieser Beziehung erleichtert ein schnelles Abschätzen des relativen Fehlers der Summe.

$$f_{ry} = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} f_{rj}x_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} f_{rj}x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

Der Bruch stellt ein gewogenes arithmetisches Mittel dar, woraus man schließt, daß der relative Gesamtfehler des Ergebnisses zwischen dem kleinsten und dem größten relativen Einzelfehler liegt.

$$f_{rj\,min} > f_{ry} > f_{rj\,max} \qquad (5)$$

Zahlenbeispiel:

Der Restwert einer Gruppe von Elektromotoren soll bestimmt werden, wenn die einzelnen Schätzungen

$$x_1 = 100\ \text{DM} \pm 5\%$$
$$x_2 = 300\ \text{DM} \pm 2\% \quad \text{und}$$
$$x_3 = 50\ \text{DM} \pm 2\%$$

sind. Der Gesamtwert beträgt $450\ \text{DM} \pm 12\ \text{DM}$

$$f_{ry} = \frac{12}{450} = 0{,}027 = \underline{2{,}7\%}$$

Der relative Fehler der Gruppe liegt zwischen dem minimalen relativen Fehler von 2% und dem maximalen relativen Eingangsfehler von 5% .

Der Fehler einer Differenz wird auf gleiche Weise dargestellt. Wird ein Näherungswert von einem anderen subtrahiert, so addieren sich die absoluten Fehler. Dies läßt sich ebenso

wie bei der Addition zeigen.

$$y = x_1 - x_2 \qquad (x_1 > x_2 > 0)$$

$$\boxed{f_y = f_1 + f_2} \qquad (6)$$

Der relative Fehler kann sehr groß werden, wenn die Differenz gegen 0 geht, also die beiden Näherungswerte einander nähern.

Beispiel: $1000 \pm 10 - 950 \pm 10 = 50 \pm 20$

$f_{r1} = 1\%$, $f_{r2} = 1{,}05\%$

$f_{ry} = 20/50 = \underline{40\%}$

Für weit auseinanderliegende Werte x_1 und x_2 kann man entwickeln:

$$f_{ry} = \frac{|f_y|}{y} = \frac{|f_1|}{y} + \frac{|f_2|}{y}$$

$$\boxed{f_{ry} = \frac{f_{r1}x_1}{y} + \frac{f_{r2}x_2}{y}} \qquad (7)$$

Ist die Differenz positiv und groß, so ist der erste Summand viel größer als der zweite; der zweite kann vernachlässigt werden:

$$\boxed{f_{ry} \approx f_{r1}} \qquad (8) \qquad (x_1 \gg x_2 > 0)$$

Beispiel:

$$1000 \pm 10 - 50 \pm 1 = \underline{950 \pm 11}$$

$f_{ry} = \frac{11}{950} = 0{,}0116$; $f_{r1} = 0{,}01$; $f_{r2} = 0{,}02$; $f_{ry} \approx f_{r1}$

Ist bei der Subtraktion von Näherungswerten die Differenz relativ klein, so nimmt der relative Fehler der Differenz ein erhebliches Ausmaß an. Wenn keine zu hohen Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit an das Ergebnis gestellt werden, kann als Faustregel gelten, daß der relative Fehler f_{r2} des Subtrahenden x_2 kleiner sein muß als der relative Fehler f_{r1} des Minuenden x_1 und daß x_1 größer als $10x_2$ sein muß, damit der relative Fehler f_{ry} der Differenz etwa dem relativen Fehler des Minuenden f_{r1} gleicht.

B. Der Fehler eines Produktes und eines Quotienten

Das Produkt y aus den positiven Näherungswerten x_1 und x_2 wird zerlegt und ausmultipliziert:

$$y = x_1 \cdot x_2 = (x_{1w} \pm f_1)(x_{2w} \pm f_2)$$
$$(x_1, x_2 > 0)$$

$$y = x_{1w}x_{2w} \pm f_1x_{2w} \pm f_2x_{1w} \pm f_1f_2$$

(9) $$f_y = \pm (f_1x_{2w} + f_2x_{1w}) \pm f_1f_2$$

(10) $$f_y = \pm x_{1w}x_{2w}(f_{r1} + f_{r2} + f_{r1} \cdot f_{r2})$$

Der relative Fehler beträgt dann[1]:

$$f_{ry} = \left| \pm \frac{f_1x_{2w} + f_2x_{1w}}{x_1 \cdot x_2} \pm \frac{f_1f_2}{x_1x_2} \right|$$

(11) $$f_{ry} \approx \left| \pm \left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \right) \pm \frac{f_1f_2}{x_1x_2} \right|$$

Das zweite Glied $\pm \frac{f_1f_2}{x_1x_2}$ kann vernachlässigt werden, wenn die relativen Fehler kleiner als 10% sind. Setzt man nämlich $f_1 = 0{,}1x_1$ und $f_2 = 0{,}1x_2$ ein, ist

$$\frac{0{,}1x_1 \cdot 0{,}1x_2}{x_1x_2} = \frac{0{,}01\, x_1x_2}{x_1x_2} = \underline{0{,}01}$$

Wird das zweite Glied vernachlässigt, ergibt sich der relative Fehler des Produktes ungefähr zu der Summe der relativen

[1] Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.97.
Sommer, F.: Einführung in die Mathematik....., a.a.O. S.9.

Fehler der Faktoren.

$$f_{ry} \approx f_{r1} + f_{r2} \qquad (12)$$

G.N. POLOSHI zeigt, daß diese Fehlerabschätzung auch für n Faktoren gilt[1].

$$f_{ry} \approx f_{r1} + f_{r2} + \dots + f_{rn} \qquad (13)$$

Beispiel: $y = x_1 \circ x_2 \circ x_3$

$x_1 = 1000 \pm 2$
$x_2 = 100 \pm 5$
$x_3 = 2 \pm 0{,}2$

$$f_{ry} \approx f_{r1} + f_{r2} + f_{r3} = \underline{15{,}2\%}$$

Wenn man ein Produkt aus j gleichen Faktoren betrachtet (z.B. $x_1 \circ x_1 \circ x_1 = x_1^3$), so leitet die Fehlerabschätzung für ein Produkt zu der Fehlerabschätzung einer Potenz über. Der relative Fehler einer Potenz, der durch den Eingangsfehler der Basis verursacht wird, ergibt sich als Produkt aus dem relativen Fehler der Basis multipliziert mit dem Exponenten.

$$y = x_1^n$$

$$f_{ry} = n f_{r1} \qquad (14)$$

Für einen Quotienten entwickelt man auf ähnliche Art den absoluten und den relativen Fehler[2]. Der Quotient soll heißen $y = \frac{x_1}{x_2}$, $(x_1, x_2 > 0)$. Die Fehler betragen[3]:

---

[1] Vgl. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.18.

[2] Die Entwicklung der Formeln wird im Anhang 1 gezeigt.

[3] Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.97.
Sommer, F.: Einführung in die Mathematik..., a.a.O. S.9f.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.19.

$$f_y \approx \frac{\pm (f_1 x_2 + f_2 x_1)}{(x_2 \pm f_2) x_2} \qquad (15)$$

$$f_y \approx \frac{x_1}{x_2} (\pm f_{r1} \pm f_{r2}) \qquad (16)$$ [1]

$$f_{ry} \approx f_{r1} + f_{r2} \qquad (17)$$

Der relative Fehler eines Quotienten ergibt sich ungefähr als Summe der relativen Fehler von Zähler und Nenner.

C. Der Fehler einer allgemeinen stetigen Funktion

Hängt eine Größe in bestimmter, definierter Form von mehreren gemessenen Größen ab,

$$y = f (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

wie es häufig in der Investitionsrechnung vorkommt, so erhebt sich die Frage nach einer allgemeinen Fehlerbestimmung. Die Fehler der einzelnen Größen sollen relativ klein sein, dann kann man die Funktion y in der Nähe der Variablen $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ durch den linearen Teil einer Taylorfunktion annähern [2].

Die Taylorreihe nimmt folgenden Verlauf: [3]

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

---

[1] Vgl. Pflier-Jahn, H.: Elektrische Meßgeräte und Meßverfahren, Berlin-Heidelberg-New York 1965, S.20.

[2] Vgl. Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 4.verb.Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963, S.287f.
Westphal, W.W.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.14ff.

[3] a stellt die unabhängige Variable und h eine kleine Abweichung dieser Variablen dar.

Die Taylorreihe[1] findet eine beliebige Näherung an die gesuchte Funktion $f(a+h)$ durch die Addition gewisser Bruchteile $(\frac{h^i}{i!})$ der höheren Ableitungen der Funktion $f(a)$ und des Restgliedes R_n. Der lineare Teil dieser Näherung besteht aus den ersten beiden Gliedern:
$f(a+h) \approx f(a) + \frac{h}{1!} f'(a)$; der Fehler h verursacht also die Abweichung $hf'(a)$. So beträgt der Fehler f_y der Funktion y :

$$f_y = \frac{\delta y}{\delta x_1} f_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} f_2 + \ldots + \frac{\delta y}{\delta x_n} f_n$$

$$\boxed{f_y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta y}{\delta x_j} f_j} \qquad (18)$$

Den relativen Fehler erhält man wieder, indem man den absoluten Fehler durch den Funktionswert y teilt.

$$\boxed{f_{ry} = \left| \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta y}{\delta x_j} \cdot f_j \right|} \qquad (19)$$

Bei G.N. POLOSHI wird dieser Ausdruck noch in weiterentwickelter Form angegeben[2].

$$\boxed{f_{ry} = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \ln y}{\delta x_j} f_j \right|} \qquad (20)$$

---

[1] Vgl. Lense, J.: Vorlesungen über höhere Mathematik, München 1948, S.60.
Hänsel, H.: Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.64.
Laugwitz, D.: Ingenieurmathematik II, B-I-Hochschultaschenbücher für den Ingenieur Bd.60, Mannheim 1964, S.81f.
v.Mangoldt, H., Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, 2.Bd.11.Aufl. Stuttgart 1958, S.201ff.
Sauer, R.: Ingenieur-Mathematik, 1.Bd. Differential- und Integralrechnung, 3.Aufl.Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964, S.132ff.
Sommer, F.: Einführung in die Mathematik..., a.a.O. S.182f.

[2] Vgl. Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.17.

Diese Weiterentwicklung vollzieht sich, indem $\delta y/y$ durch $\delta \ln y$ substituiert wird[1].

Benutzt man für f_j das Produkt $f_{rj} \cdot x_j$, so gelangt man zu einem Ausdruck, der den relativen Fehler der Funktion in Abhängigkeit der relativen Fehler der einzelnen Größen zeigt.

$$f_{ry} \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \ln y}{\delta x_j} f_{rj} \cdot x_j \qquad (21)$$

In dieser Formel befindet sich der reziproke Wert des Bruches $\delta x_j/x_j$, der durch den reziproken Wert von $\delta \ln x_j$ substituiert werden kann. Der Ausdruck erhält die Form:

$$f_{ry} \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta \ln y}{\delta \ln x_j} f_{rj} \qquad (22)$$

Über diese allgemeinen Formeln zur Abschätzung von den Fehlern, die durch Fortpflanzung nicht zu großer Eingangsfehler im Ergebnis auftreten, lassen sich die vorher entwickelten Schätzungen für einfache Verknüpfungen ebenfalls entwikkeln.

Beispiel: Der Fehler einer Potenzfunktion.

Eine Funktion, die als Produkt zweier Potenzen auftritt, soll auf ihren Fehler hin untersucht werden, der durch Eingangsfehler der Basen auftritt. In der Investitionsrechnung treten Potenzfunktionen in irgendeiner Form häufig auf.

$$y = x_1^n \cdot x_2^{-m}$$

Durch Einsetzen in Formel (18) erhält man:

$$f_y = n x_1^{n-1} \cdot f_1 - m x_2^{-m-1} \cdot f_2$$

---

[1] Die Gleichheit von $\delta y/y$ und $\delta \ln y$ resultiert aus der ersten Ableitung des natürlichen Logarithmus einer Funktion.

$$\frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{y} \longrightarrow \frac{dy}{y} = d \ln y$$

Vgl. Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.263.

Der relative Fehler berechnet sich nach Formel (20) zu:

$$f_{ry} = \left|\frac{d(n \circ \ln x_1 - m \circ \ln x_2) f_1}{dx_1}\right| + \left|\frac{d(n \circ \ln x_1 - m \circ \ln x_2) f_2}{dx_2}\right|$$

$$= n \frac{f_1}{x_1} + m \frac{f_2}{x_2}$$

IV. Die Fortpflanzung zufälliger, statistisch verteilter Fehler

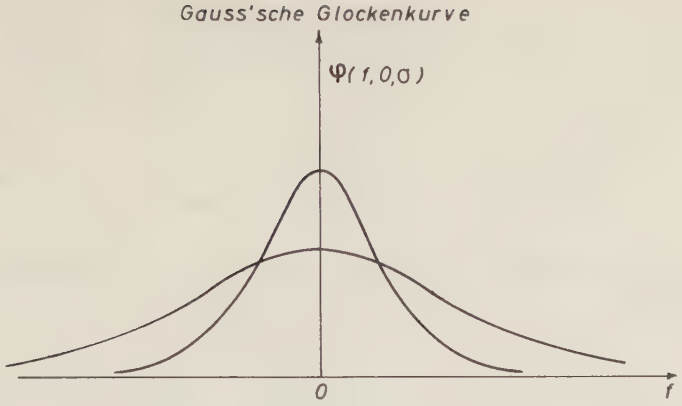
A. Rechengrößen der statistischen Fehlerverteilung

Die zufälligen Fehler verteilen sich in der Form einer GAUSSschen Glockenkurve[1] um den Fehler null (Figur 6). Die Dichte ihres Auftretens als Funktion der Fehlergröße f lautet:

$$\varphi(f, 0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp^{\frac{-f^2}{2\sigma^2}} \qquad (23)$$

σ = Standardabweichung, φ = Dichte der Fehlerverteilung.

[1] Vgl. Smirnow, N.W.; Dunin-Barkowski, I.W.: Mathematische Statistik in der Technik, Berlin 1963, S.106ff.
Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.30
Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, a.a.O. S.255.
Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.510f.
Morgenstern, D.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964, S.156ff.
Pfanzagl, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik II, Sammlung Göschen Bd. 747/747a, Berlin 1962, S.27ff.
Lindner, A.: Statistische Methoden, Basel und Stuttgart 1960, S.353ff.



Figur 6

Die wahre gesuchte Größe der Messung ist in den meisten Fällen nicht bekannt und wird deshalb durch den wahrscheinlichsten Wert[1] vertreten. Den wahrscheinlichsten Wert einer Anzahl von Meßwerten bildet das gewogene arithmetische Mittel[2].

In der statistischen Methodenlehre wie auch in der naturwissenschaftlichen Fehlerrechnung werden für das Auftreten zufälliger Fehler eine Reihe Fehlergrößen definiert.

Der scheinbare Fehler stellt die Differenz zwischen dem Meßwert und dem wahrscheinlichsten Wert dar.

$$f_s = x - x_w \qquad (24)$$

f_s = scheinbarer Fehler, x_w = wahrscheinlichster Wert.

Der mittlere Fehler aus n voneinander unabhängigen Einzelmessungen ergibt sich als Funktion wahrer Fehler f_j zu:

[1] Vgl. Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.30.
[2] Vgl. Hänsel, H.: Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.22.

$$f_m = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} f_j^2}{n}} \qquad (25)$$

$$n \longrightarrow \infty$$

Der mittlere Fehler aus scheinbaren Fehlern f_{sj} berechnet sich zu[1]:

$$f_m = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} f_{sj}^2}{n-1}} \qquad (26)$$

$$n \longrightarrow \infty$$

Der Unterschied in der Bildung des Mittels der Quadrate liegt darin begründet, daß die scheinbaren Fehler einen Freiheitsgrad weniger besitzen als die wahren, weil aus den n Meßwerten auch der wahrscheinlichste Wert x_w berechnet wird.

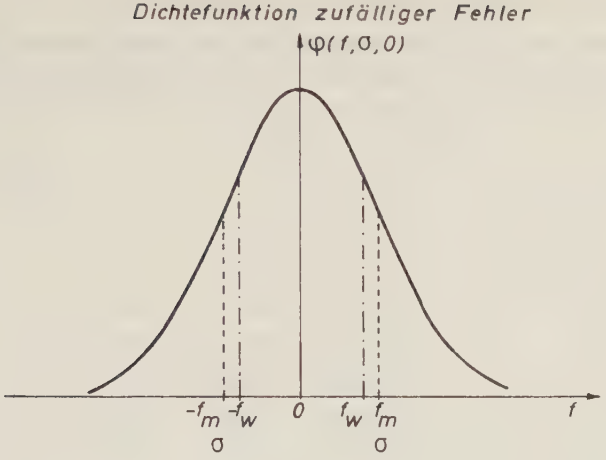
Der mittlere Fehler stellt auf der GAUSS'schen Glockenkurve die Abszisse des Wendepunktes dar[2]. Es ist ein Maß für die Güte der Schätzungen. Bei einer sehr großen Anzahl von Schätzungen einer Meßreihe liegen 68% aller Fehler zwischen den Grenzen des mittleren Fehlers, der in der Literatur der statistischen Methodenlehre auch häufig Standardabweichung σ genannt wird[3].

---

[1] Vgl. Hänsel, H.: Die Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.26.
Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.26.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.31ff.
Westphal, W.W.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.12.

[2] Vgl. Hänsel, H.: Die Grundzüge der Fehlerrechnung, a.a.O. S.53.

[3] Vgl. Sommer, F.: Einführung in die Mathematik, a.a.O. S.219.



Figur 7

Die Spannweite auf der Fehlerachse f , die sowohl nach der positiven als auch nach der negativen Richtung die Strecke von 3σ oder $3 f_m$ umfaßt, heißt Dreisigmagrenze. 99,73% aller Fehler liegen innerhalb dieser Grenze, daher betrachtet man sie auch als absolute Fehlergrenze und findet damit den Übergang von der Rechnung mit zufälligen Fehlern zu der Rechnung mit systematischen Fehlern.

Der Wert der Abszisse, der die Größe $0{,}67\ f_m$ trägt, zeigt den w a h r s c h e i n l i c h e n Fehler an (vgl. Figur 7). Dieser Fehler wird bei einer genügend großen Anzahl der Meßwerte ebenso oft über- wie unterschritten[1].

$$f_w = \pm\ 0{,}67449 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} f_{sj}^2} \approx 0{,}67\ f_m \qquad (27)$$

[1] Vgl. Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.27.

B. Der mittlere Eingangsfehler in einfachen Verknüpfungen

Die Verkettung mittlerer scheinbarer und wahrer Fehler wird über einen allgemeinen Ausdruck für relativ kleine Fehler untersucht. Die allgemeine Funktion y,

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots) \qquad 1$$

enthält den Fehler f_y,

$$f_y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta y}{\delta x_j} f_j$$

Nimmt man für f_y das Differential dy, so ändern sich alle f_j in dj und die Fehlergleichung läßt sich nach dem Ersetzen der partiellen Differentiale $\frac{\delta y}{\delta x_j}$ durch $a, b, c, \dots$ auch schreiben als

$$dy = adx_1 + bdx_2 + cdx_3 + \dots$$

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots$$

Die Größen $x_1, x_2, x_3, \dots$ sollen normale Verteilungen mit den Varianzen $\sigma^2_{x_j}$ darstellen.

Aus den Gesetzen von Funktionen mit normal verteilten Variablen läßt sich die Varianz des Funktionswertes y bestimmen[2].

$$\sigma^2_y = a^2 \sigma^2_{x_1} + b^2 \sigma^2_{x_2} + c^2 \sigma^2_{x_3} + \dots$$

Die Varianzen werden für den diskreten Fall durch die mittleren Fehlerquadrate ersetzt[3].

---

[1] Vgl. Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, a.a.O. S.288.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.34.

[2] Vgl. Pfanzagl, J.: Allgemeine Methodenlehre der Statistik II, a.a.O. S.50.
Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, a.a.O. S.261.

[3] Vgl. Pflier-Jahn, H.: Elektrische Meßgeräte ...,a.a.O. S.21.
Westphal, W.W.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.16.

f_{m1} symbolisiert den mittleren Fehler von x_1 .

$$f_{my} = \sqrt{a^2 f_{m1}^2 + b^2 f_{m2}^2 + c^2 f_{m3}^2 + \dots\dots} \qquad (28)$$

Diese Funktion stellt das Fehlerfortpflanzungsgesetz nach GAUSS dar.

Bei beliebigen nichtlinearen Funktionen werden statt der Größen a, b, c, ... wieder die partiellen Ableitungen der Funktion an den Stellen $x_1, x_2, x_3, \dots\dots$ eingesetzt. Für die Grundrechenarten kann man folgende Regeln für das Rechnen mit Standardabweichungen entwickeln[1].

Es sei $y = f(x_j) = y_w \pm f_{my}$, $x_j = x_{jw} \pm f_{mj}$

Die Werte mit dem Index w sind die exakten Werte oder wahrscheinlichsten Werte, f_{mj} die mittleren quadratischen Fehler.

1. Der mittlere Fehler einer Summe:

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots \\ &= x_{1w} + x_{2w} + x_{3w} + \dots\dots \pm \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2 + \dots\dots} \end{aligned}$$

$$f_{my} = \pm \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2 + f_{m3}^2 + \dots\dots} \qquad (29)$$

2. Der mittlere Fehler einer Differenz:

$$y = x_1 - x_2 \qquad (x_1 > x_2 > 0)$$

$$f_{my} = \pm \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2} \qquad (30)$$

[1] Vgl. Küster, F.W.: Logarithmische Rechentafeln, Laboratoriums-Taschenbuch für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker, Berlin 1941, Seite 207.
Poloshi, G.N.: Mathematisches Praktikum, a.a.O. S.33.

3. Der mittlere Fehler eines Produktes:

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$= x_{1w}x_{2w}x_{3w} \pm \sqrt{x_{2w}^2 x_{3w}^2 f_{m1}^2 + x_{1w}^2 x_{3w}^2 f_{m2}^2 + x_{1w}^2 x_{2w}^2 f_{m3}^2}$$

$$\boxed{f_{my} = \pm \sqrt{x_{2w}^2\, x_{3w}^2\, f_{m1}^2 + \ldots\ldots}} \qquad (31)$$

4. Der mittlere Fehler eines Quotienten:

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

$$= \frac{x_{1w}}{x_{2w}} \pm \frac{1}{x_{2w}^2} \sqrt{x_{2w}^2 f_{m1} + x_{1w}^2 f_{m2}}$$

$$\boxed{f_{my} = \frac{1}{x_{2w}^2} \sqrt{x_{2w}^2\, f_{m1} + x_{1w}^2\, f_{m2}}} \qquad (32)$$

5. Der mittlere Fehler einer Potenzfunktion[1]:

$$y = x_1^{\pm k} \cdot x_2^{\pm l} \cdot x_3^{\pm m}$$

(33)

$$\boxed{f_{my} = \pm\, x_{1w}^{\pm k} \cdot x_{2w}^{\pm l} \cdot x_{3w}^{\pm m} \sqrt{(k\frac{f_{m1}}{x_{1w}})^2 + (l\frac{f_{m2}}{x_{2w}})^2 + (m\frac{f_{m3}}{x_{3w}})^2}}$$

Um die mittleren relativen Fehler dieser Funktionen zu erhalten, braucht man die mittleren Fehler lediglich durch die Funktion zu dividieren.

---

[1] Vgl. Ulrich, E.: Physikalisches Praktikum, a.a.O. S.34.

DRITTES KAPITEL

Die Aussageanalyse der Investitionsmodelle unter der Annahme einwertiger Erwartungen

I. Modelle der Gewinnmaximierung

A. Die Diskontierungs- oder Kapitalwertmethode

1. Modellbeschreibung

Das Modell der Kapitalwertmethode diskontiert die Folge der Einzahlungen und die Folge der Auszahlungen einer Investition und transformiert sie auf den Betrachtungszeitpunkt. Der Überschuß des Barwertes der Einnahmen über den Barwert der Auszahlungen heißt Kapitalwert[1] oder Goodwill[2] der Investition.

$$C = e_o q^{-o} + e_1 q^{-1} + e_2 q^{-2} + \ldots + e_n q^{-n} - (a_o q^{-o} + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_n q^{-n})$$

$$C = (e_o - a_o) q^{-o} + (e_1 - a_1) q^{-1} + (e_2 - a_2) q^{-2} + \ldots + (e_n - a_n) q^{-n}$$

$$d_j = e_j - a_j$$

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.15ff.
Brandt, H.: Investitionspolitik des Industriebetriebes, Wiesbaden 1959, S.66ff.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie..., a.a.O. S.49ff.
Borchard, K.-H.: Wirschaftlichkeitsplanung, Wiesbaden 1962, S.22ff.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwatungen, a.a.O. S.44ff.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, Diss.Berlin 1960, S.63ff.

[2] Vgl. Lutz, F.und V.: The Theory of...., a.a.O. S.12.
Briel, H.V.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, Diss. Winterthur 1955, S.36.

$$C = \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} \qquad (34)$$

C = Kapitalwert, Goodwill
e_j = Einzahlung im Zeitpunkt j
a_j = Auszahlung im Zeitpunkt j

Die Aussage des Modells besteht in einem Kapitalwert, der sich aus der Summe aller diskontierten positiven und negativen Gewinne zusammensetzt. Die Auswahl eines Investitionsobjektes aus einer Gruppe wird durch einen Kapitalwertvergleich vorgenommen. Jede Investition mit einem positiven Kapitalwert ist als vorteilhaft definiert[1], die mit dem größten wird gewählt.

2. Modellanalyse

Die Folge der zukünftigen Einnahmen und Ausgaben wird im Modell als bekannt vorausgesetzt. In vielen Fällen erweist es sich für die Rechnung als zweckmäßig, die erste Ausgabe zum Zeitpunkt null a_o, die die Anschaffungsausgabe darstellt, besonders zu kennzeichnen.

$$a_o = A_o$$

Unter Berücksichtigung von kalkulatorischen Zinsen können Kosten und Erträge an Stelle von Einnahmen und Ausgaben verwendet werden. Die Anschaffungsausgabe verteilt sich dann in der Form von jährlichen Abschreibungsbeträgen oder Restwertminderungen auf die Nutzungsdauer. Der Kostenbestandteil, der sich aus Zinsen für den Restwert und Restwertminderung zusammensetzt, nennt sich Kapitalkosten, k_c.

$$k_c = (R_{j-1} - R_j) + iR_{j-1} \qquad (R_o = A_o)$$

Das Modell kann sowohl für eine einzelne Investition als auch

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S. 22ff.

für eine Gruppe von Investitionen angesetzt werden. Daher kann auch eine Einzelinvestition mit einer Gruppe verglichen werden. Die Investition muß sachlich und zeitlich isolierbar sein, also müssen die Interdependenzen zu ihrer Umwelt und ihre zeitlichen Interdependenzen bekannt sein. Objekte mit verschiedenen Nutzungsdauern können mit dem Modell verglichen werden, wobei man stillschweigend annimmt, daß die Gewinne nach der Beendigung der Nutzungsdauer null betragen. Das Modell fordert die sorgfältige Auswahl der Elemente nicht ausdrücklich durch zusätzliche Nebenbedingungen, sondern setzt die Korrektheit und Vollkommenheit aller eingegangenen Größen stillschweigend voraus. Hieraus entsteht ein Problem. Da die wirtschaftlichen Größen nur mit begrenzter Genauigkeit meßbar und zukünftige auch einwertige Zahlungsbeträge nur innerhalb eines gewissen Bereiches abschätzbar sind, kann die Modellaussage nur in einem abgesteckten Bereich gelten. Das Vorgehen bei der Ermittlung der Ertrags- und Kostengrößen wird in der Literatur an mehreren Stellen ausführlich beschrieben[1]. Die Berücksichtigung der zwangsläufig auftretenden Abweichungen der ermittelten Werte von den eingetretenen Größen ist bisher nicht erfolgt.

3. Die Empfindlichkeit der Kapitalwertmethode gegen Zinsschwankungen

a. Berechnung des Zinsfehlers

Die Höhe des Kapitalwertes einer Investition hängt bei gegebenen jährlichen Gewinnen (Verlusten) von der Größe des Kalkulationszinsfußes ab[2]. Seine Berechnungsmethode wurde bis-

---

[1] Vgl. Brandt, H.: Investitionspolitik..., a.a.O. S.86ff.
Terborgh, G.: Business Investment Policy, 2.Aufl. Washington 1962, S.90ff.
Terborgh, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik, deutsche Übersetzung von Albach, H., Wiesbaden 1962, S.136ff.
Borchard, K.-H.: Wirtschaftlichkeitsplanung, a.a.O. S.44ff.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, Berlin-Köln-Frankfurt/Main 1964, S.84ff.
Jonas, H.: Investitionsrechnung, Berlin 1964, S.63ff.
Sutter, W.: Wirtschaftlichkeitsrechnung als Planungsinstrument, Herne-Berlin 1964, S.58ff.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.20.

her nicht einheitlich fixiert. Während H. ALBACH die durchschnittliche langfristige Rentabilität der Unternehmung als Kalkulationszinsfuß vorschlägt[1], eine Meinung, die auch von R. KREIS vertreten wird[2], berechnet E. SCHNEIDER den Kalkulationszinsfuß über die Elemente Fremdkapital, Eigenkapital, Fremdkapitalzins, Eigenkapitalzins, Risiko und gewünschte interne Verzinsung[3]. Daneben existieren noch andere Berechnungsvorschläge[4]. In welchem Vorschlag der beste Weg gesehen wird, soll hier nicht diskutiert werden, sondern hier wird die Frage untersucht, wie sich der Kapitalwert einer Investition bei Zinsschwankungen verhält.

Um den Fehler zu bestimmen, der durch eine Zinsabweichung verursacht wird, benutzt man die Fehlergleichung 18. Da nur eine Eingangsgröße, der Zinsfuß i, beachtet wird, beträgt die Kapitalwertabweichung:

$$f_{Ci} = \left(\frac{\delta C}{\delta i} \right) f_i$$

$$C = \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j}$$

$$\boxed{f_{Ci} = \left(\sum_{j=o}^{n} -j d_j q^{-j-1} \right) f_i} \qquad (35)$$

Über den Fehler läßt sich ohne eingehendere Untersuchung nur

---

[1] Vgl. Albach, H.: Investition und Liquidität, a.a.O. S.86.

[2] Vgl. Kreis, R.: Möglichkeiten und Grenzen der Anwendung der Kapitalwertmethode bei Investitionsentscheidungen, Böblingen 1964, S.3ff.

[3] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.66f.

[4] Vgl. Moxter, A.: Die Bestimmung des Kalkulationszinsfußes bei Investitionsentscheidungen, in: ZfhF NF 13.Jg.1961, S. 186ff.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in...,a.a.O.S.133ff.
Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von Investitionen, Köln und Opladen 1962, S.84ff.
Jonas, H.: Investitionsrechnung, a.a.O. S.17.
Schwan, H.T.: Die Ersatzbeschaffung von Maschinen und Anlagen in: Handbuch des Industrial Engineering, Bd.VII Berlin W-Köln-Frankfurt/Main 1956, S.106ff.

aussagen, daß für kleine q , es ist $q = 1+i$, die zeitlich entfernt liegenden Beträge stärker einwirken als die nahen und erst nach sehr großem Zeitraum die Wirkung durch q^{-n-1} wieder aufgehoben wird.

Der Faktor jq^{-j-1} für einen bestimmten Zeitraum und Zinsfuß berechnet und in Tabellenform geschrieben zeigt den Fehlerverlauf schon deutlicher.

Der Faktor jq^{-j-1} für alternative j und i

j	Faktor jq^{-j-1} für den Zinsfuß				
	0,05	0,08	0,10	0,15	0,20
1	0,91	0,86	0,83	0,76	0,69
2	1,73	1,59	1,50	1,32	1,16
3	2,47	2,21	2,05	1,72	1,45
4	3,13	2,72	2,48	1,99	1,61
5	3,73	3,15	2,82	2,16	1,67
6	4,26	3,50	3,08	2,26	1,67
7	4,74	3,78	3,27	2,29	1,63
8	5,16	4,00	3,39	2,27	1,55
9	5,52	4,17	3,47	2,22	1,45
10	5,85	4,29	3,51	2,15	1,35

[1]

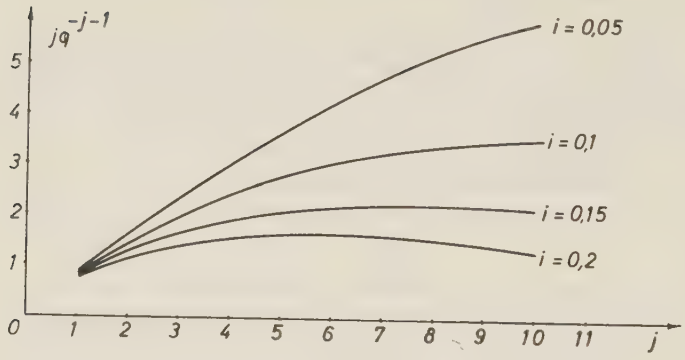
Tabelle 1

Figur 8 zeigt den Faktorverlauf graphisch.

---

[1] Die Genauigkeit der Tabellenwerte wird durch die angegebenen geltenden Ziffern gekennzeichnet.

Der zeitabhängige Verlauf des Faktors jq^{-j-1}



Figur 8

Der Zinsfehler f_{Ci} verläuft als eine Funktion des Zinsfußes, der Zeit und des Gewinns.

$$-f_{Ci} = f_i \cdot S(i, j, d_j)$$

Nimmt man an, daß die Höhe der Gewinne einer Gesetzmäßigkeit unterliegt, die als Funktion des Gewinnes im ersten Jahr ausgedrückt werden kann, $d_j = d_1 \cdot f(j)$, so ist der Zinsfehler eine Funktion von i und j .

$$\boxed{-f_{Ci} = f_i \cdot d_1 \cdot S(i, j)} \qquad (36)$$

Eine Anzahl betrieblicher Anlagen wirft Gewinne ab, die zeitlich monoton fallen[1]. Für einige dieser Gewinnverläufe sollen typische Fehlerfunktionen von Zinsfehlern ermittelt werden. Vier Verläufe können als charakteristisch für einen Teil be-

---

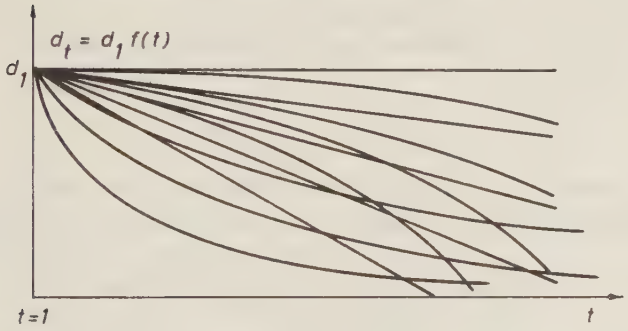
[1] Eine Funktion heißt monoton fallend, wenn sie nicht wieder ansteigt. Sie heißt monoton wachsend, wenn sie nicht wieder fällt. Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.229.

trieblicher Investitionen angenommen werden:

1. konstante Gewinne
2. linear fallende Gewinne
3. degressiv fallende Gewinne
4. progressiv fallende Gewinne

Diese vier Gruppen von Musterverläufen überdecken das Gebiet aller monoton fallenden Gewinnverläufe mit einem engen Netz (vgl. Figur 9). Sie ermöglichen eine gute Annäherung eines großen Teils der in praxi vorkommenden Fälle.

Monoton fallende Gewinnverläufe



Figur 9

b. Darstellung des Zinsfehlers für zeitlich konstante Gewinne

Der erste Gewinnverlauf besteht in einem Auszahlungsüberschuß im Jahre o und konstanten jährlichen Einzahlungsüberschüssen.

$$d_1 = d_2 = d_3 = ... = d_n = \underline{d}$$

Der Kapitalwert dieser Investition beträgt[1]:

$$C = -A_o + d \frac{q^n - 1}{iq^n}$$

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.20.

Der absolute Fehler wird ermittelt zu:

$$-f_{Ci} = \left(\sum_{j=1}^{n} j d_j q^{-j-1} \right) f_i$$

Den konstanten jährlichen Gewinn $d_j = d$ setzt man vor die Klammer und erhält:

$$-f_{Ci} = d\left(\sum_{j=1}^{n} j q^{-j-1} \right) f_i \qquad (37)$$

Man zieht den Inhalt der Klammer zu einem Symbol S_k zusammen und sucht für diesen Fehlerfaktor einen einfacheren Ausdruck.

$$-f_{Ci} = d\, S_k\, f_i$$

Der Summenausdruck S_k wird in seine Summanden aufgeschlüsselt. Gleichzeitig wählt man für $1/q$ das Symbol v :

$$S_k = v^2 + 2v^3 + 3v^4 + \ldots + (n-1)v^n + nv^{n+1}$$

$$\frac{S_k}{v} = v + 2v^2 + 3v^3 + 4v^4 + \ldots + nv^n$$

$$\frac{S_k}{v} - S_k = v + v^2 + v^3 + v^4 + \ldots + v^n - nv^{n+1}$$

Subtrahiert man von dem Quotienten S_k/v die Summe S_k, so erhält man eine Reihe, die sich leichter als Summe formulieren läßt. Jetzt werden beide Seiten der Gleichung durch v geteilt:

$$S_k \frac{1 - v}{v^2} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots + v^{n-1} - nv^n$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält die bekannte geometri-

sche Reihe:

$$S_k \frac{1 - v}{v^2} = \frac{1 - v^n}{1 - v} - nv^n$$

Setzt man nun für v wieder $1/q$ ein und dividiert beide Seiten der Gleichung durch $(1 - v)/v^2$ so erhält man:

$$S_k = \frac{1 - q^{-n}}{i^2} - \frac{n\, q^{-n-1}}{i} \qquad (38)$$

Mit steigender Lebensdauer wächst der Fehlerfaktor und nähert sich für eine unendlich lange Nutzungsdauer einem Grenzwert.

$$S_{k\,\infty} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-q^{-n}}{i^2} - \frac{nq^{-n-1}}{i} \right)$$

$$S_{k\,\infty} = \frac{1}{i^2} \qquad (39)$$

Den Fehlerfaktor S_k für verschiedene Nutzungsdauer n und Zinssätze i zeigt Tabelle 2 .

Zinsfuß i	Fehlerfaktor S_k für die Nutzungsdauer			
	4	7	10	∞
0,05	8,24	21,0	37,5	400
0,10	6,86	16,0	26,4	100
0,15	5,77	12,5	19,1	44,4
0,20	4,90	9,89	14,2	25,0

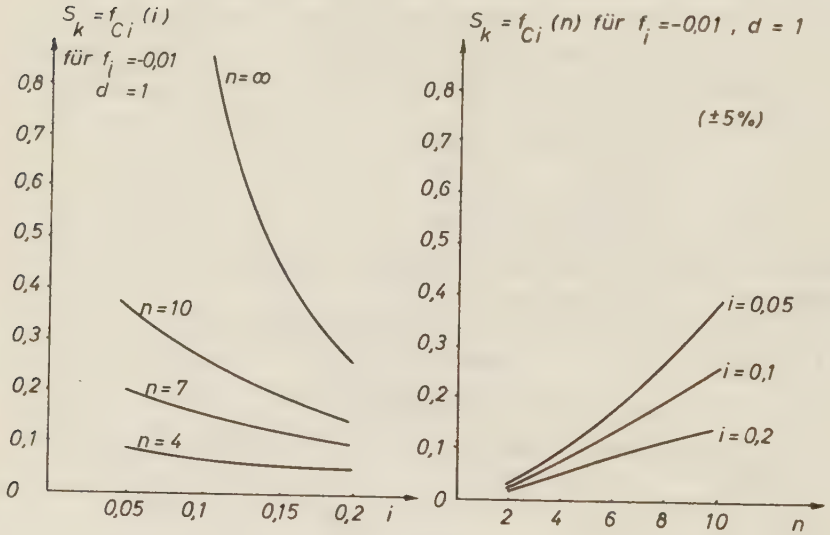
Tabelle 2

[1] Die Genauigkeit der Tabellenwerte wird durch die angegebenen geltenden Ziffern gekennzeichnet.

Die graphischen Darstellungen für alternative i und n zeigen deutlich, daß ein Fehler bei kleinen Zinssätzen und großer Lebensdauer am stärksten in Erscheinung tritt.

Die Figuren beschreiben den Fehler, den eine Schwankung des Kalkulationszinsfußes von einem Prozent bei einem konstanten Gewinn von einer Geldeinheit am Kapitalwert verursacht.

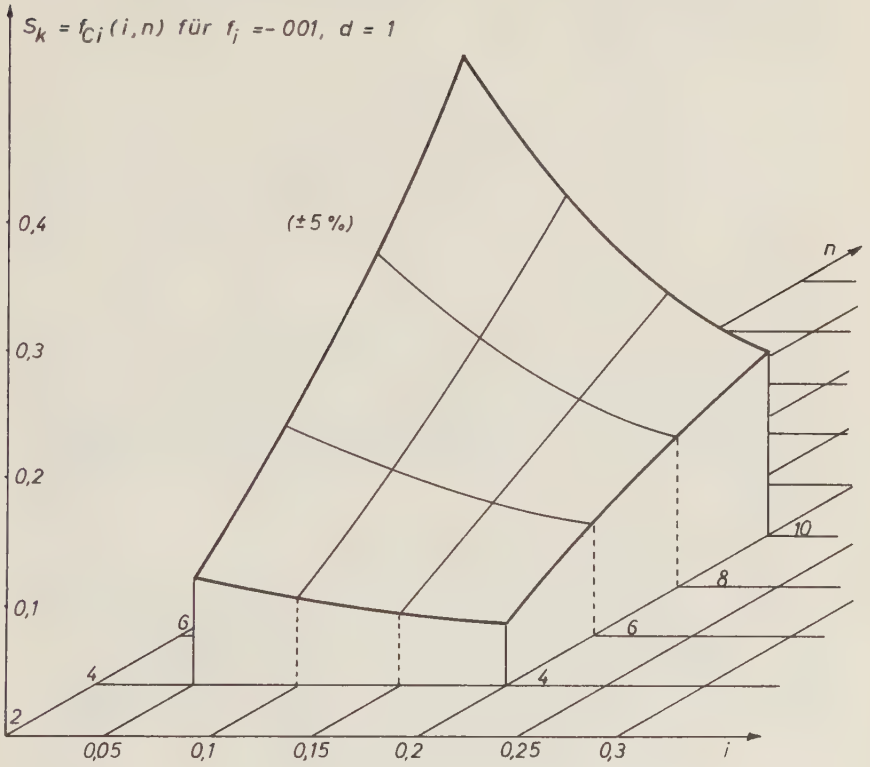
Der Fehlerfaktor S_k als Funktion des Zinses und der Zeit



10 a Figur 10 10 b

Figur 11 zeigt den absoluten Fehler für die Zinsschwankung 0,01 und den Gewinn 1 GE als Funktion von beiden unabhängigen Variablen.

Der Fehlerfaktor S_k als Funktion des Zinses und der Zeit



Figur 11

Der aufgezeichnete Fehler braucht nun nur noch mit der effektiven Zinsschwankung und dem effektiven konstanten jährlichen Gewinn multipliziert zu werden, und das Ergebnis liegt als Zinsfehler des Kapitalwertes für die Investition vor. Dabei muß beachtet werden, daß für das Ausmaß der Zinsabweichungen

durch die Voraussetzung eine Grenze gezogen ist, die verlangt, daß man in der Umgebung des betrachteten Wertes bleibt. Nur für die Umgebung des Näherungswertes besitzt die erste Ableitung der Funktion als Steigungsmaß Geltung.

Der relative Zinsfehler f_{rCi} des Kapitalwertes besteht aus dem Quotienten $\left| f_{Ci} : C \right|$.

$$f_{rCi} = d \left| \frac{\frac{1 - q^{-n}}{i^2} - \frac{nq^{-n-1}}{i}}{-A_o + d \frac{q^n - 1}{iq^n}} \cdot f_i \right| \qquad (40)$$

Da der Zinsfuß meistens in Prozenten ausgedrückt wird, erübrigt es sich, seine Schwankung als relativen Fehler in Ansatz zu bringen. Der Berechnung des relativen Zinsfehlers des Kapitalwertes steht entgegen, daß sich der Fehler nicht in so einfacher Weise wie der absolute Fehler darstellen läßt, weil im Nenner des Quotienten auch der Anschaffungswert A_o auftaucht.

c. Darstellung des Zinsfehlers bei linear fallenden Gewinnen

Geht man von der Voraussetzung aus, daß die Gewinne mit fortschreitender Zeit linear fallen und die Nutzungsdauer des Investitionsobjektes für den Zeitraum, in dem die Gewinne positiv sind, angesetzt wird, so ergibt sich der folgende Verlauf:

$$d_j = d_1 \left(1 - \frac{j - 1}{n} \right) \qquad (41)$$

Die Fehlergleichung für den absoluten Zinsfehler des Kapitalwertes bildet wieder den Ansatz.

$$-f_{Ci} = \left(\sum_{j=1}^{n} j d_j q^{-j-1} \right) f_i$$

Für d_j setzt man nun die Funktion von d_1 ein:

$$-f_{Ci} = d_1\left(\sum_{j=1}^{n} j\left(1 - \frac{j-1}{n}\right)q^{-j-1}\right) f_i \qquad (42)$$

$$-f_{Ci} = d\, S_1\, f_i \qquad (d_1 = d)$$

Für den Fehlerfaktor einer linear fallenden Gewinnfolge S_1 läßt sich in ähnlicher Weise wie im vorigen Abschnitt eine Summenformel entwickeln[1].

$$S_1 = \frac{1-q^{-n}}{i^2} - \frac{n\,q^{-n-1}}{i} - \frac{1}{i^2}\left(\frac{2(1-q^{-n})}{ni} - \frac{n+1}{q^n} + \frac{n-1}{q^{n+1}}\right) \qquad (43)$$

Der Verlauf dieses Faktors für alternative Zinsfüße und Nutzungsdauer läßt sich nur schwer übersehen. Die tabellarische und graphische Darstellung für einige Werte der unabhängig Veränderlichen erleichtern die Übersicht (vgl. Tabelle 3 und die Figuren 12a, 12b und 13). Der Ansatz einer unendlichen Nutzungsdauer leitet von der fallenden Gewinnfunktion in die Funktion mit konstanten Gewinnen über.

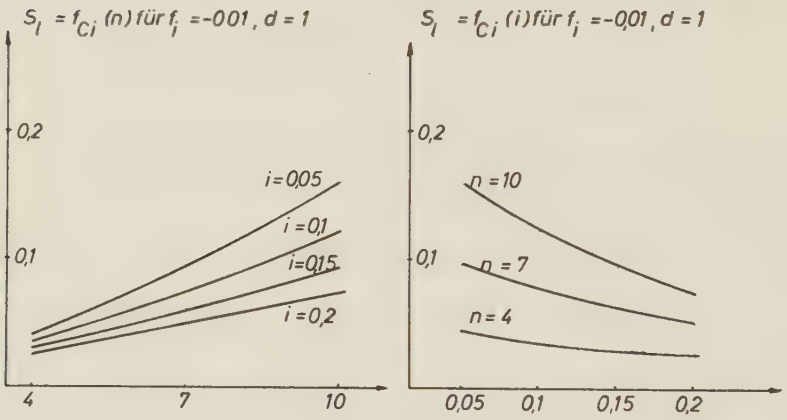
Fehlerfaktoren für linear fallende Gewinne

Zinsfuß i	Fehlerfaktor S_1 für die Nutzungsdauer 4	7	10
0,05	4,2	9,7	16
0,10	3,6	7,6	12
0,15	3,1	6,1	9,4
0,20	2,7	5,1	7,4

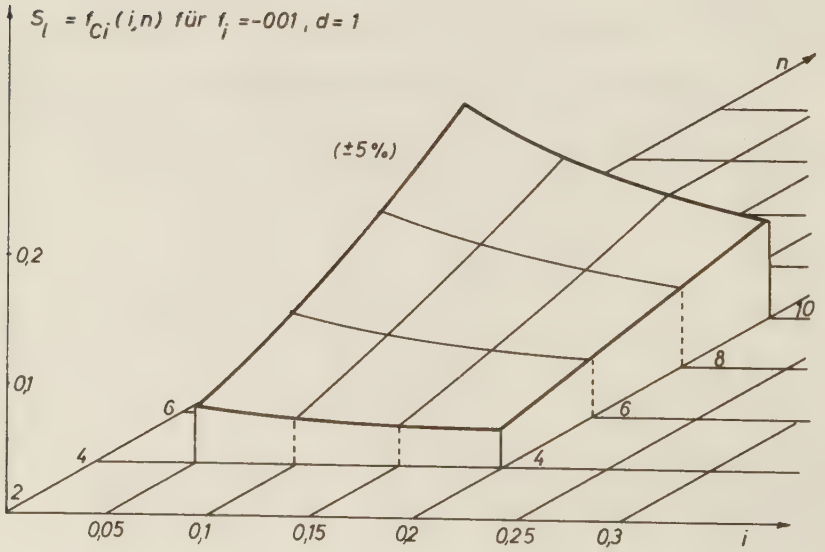
Tabelle 3

[1] Die Entwicklung der Summenformel für S_1 wird im Anhang 2 gezeigt.

Der Fehlerfaktor S_l als Funktion des Zinses und der Zeit



12 a Figur 12 12 b



Figur 13

Die Figuren zeigen den Zinsfehler des Kapitalwertes für eine Zinsschwankung um 1% und eine linear fallende Gewinnfunktion, deren erster Gewinn eine Geldeinheit beträgt. Verglichen mit dem Fehlerverlauf für konstante Gewinne fällt die starke Fehlerverminderung der Zinsfehler auf.

d. Darstellung des Zinsfehlers bei degressiv fallenden Gewinnen

Als dritter Modellfall soll ein degressiv fallender Gewinnverlauf zur Fehleruntersuchung angesetzt werden. Die Degressionsrate p_d nimmt einen konstanten Wert an, das bedeutet, jeder Jahresgewinn stellt den gleichen Bruchteil des Gewinnes des Vorjahres dar.

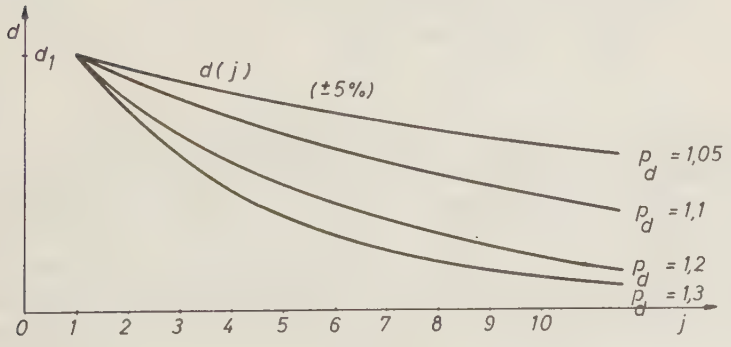
$$d_j = \frac{d_{j-1}}{p_d} \qquad (p_d \geqq 1)$$

Schreibt man den Gewinn des Jahres j als Funktion des Gewinnes im ersten Jahr d_1, im folgenden d genannt, so erhält man:

$$\boxed{d_j = \frac{d}{p_d^{j-1}}} \qquad (44)$$

Figur 14 zeigt einige degressive Gewinnverläufe.

Degressiv fallende Gewinnverläufe



Figur 14

Nähert sich die Degressionsrate p_d dem Wert 1 , so geht der Gewinnverlauf aus der Degression in den konstanten Gewinnverlauf über.

In die Formel für den absoluten Zinsfehler des Kapitalwertes wird diese Funktion des ersten Gewinnes eingesetzt:

$$-f_{Ci} = d\left(\sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{1}{p_d^{j-1}}\right) q^{-j-1} \right) f_i \qquad (45)$$

$$-f_{Ci} = d\, S_d\, f_i$$

Der Rechengang zur Entwicklung einer Summenformel gleicht dem in den beiden letzten Abschnitten benutzten. Er zeitigt als Ergebnis folgenden Ausdruck[1] für den Fehlerfaktor S_d :

$$S_d = \frac{(1 - (p_d q)^{-n}) p_d^2}{(p_d q - 1)^2} - \frac{n p_d}{(p_d q - 1) q (p_d q)^n} \qquad (46)$$

Geht die Nutzungsdauer n gegen unendlich, nähert S_d sich einem Grenzwert.

$$S_{d\infty} = \frac{p_d^2}{(p_d q - 1)^2} \qquad (47)$$

Tabelle 4 zeigt die Größe des Fehlerfaktors S_d für drei verschiedene Degressionsraten und alternative Werte der Nutzungsdauer und des Zinsfußes.

[1] Die Entwicklung der Summenformel wird im Anhang 3 durchgeführt.

Tabelle der Fehlerfaktoren
bei degressiv fallenden Gewinnen

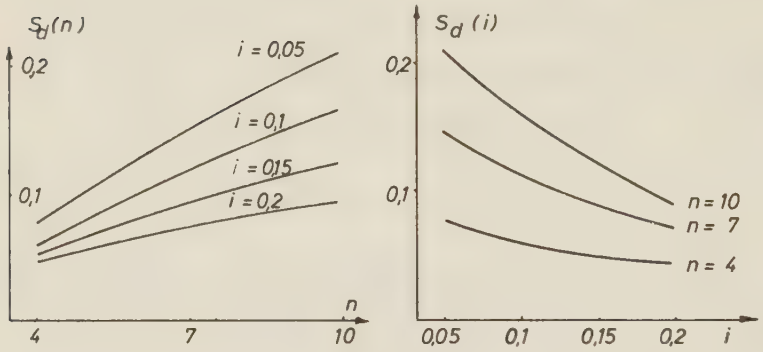
Degressions-rate p_d	Zinsfuß i	Fehlerfaktor S_d für die Nutzungsdauer 4	7	10
1,05	0,05	7,5	17	29
	0,10	6,3	13	20
	0,15	5,3	11	15
	0,20	4,5	8,4	11
1,10	0,05	6,9	14	22
	0,10	5,8	11	16
	0,15	4,9	9,0	12
	0,20	4,2	7,3	9,3
1,20	0,05	5,9	11	15
	0,10	4,9	8,6	11
	0,15	4,2	6,9	8,5
	0,20	3,6	5,6	6,6

Tabelle 4

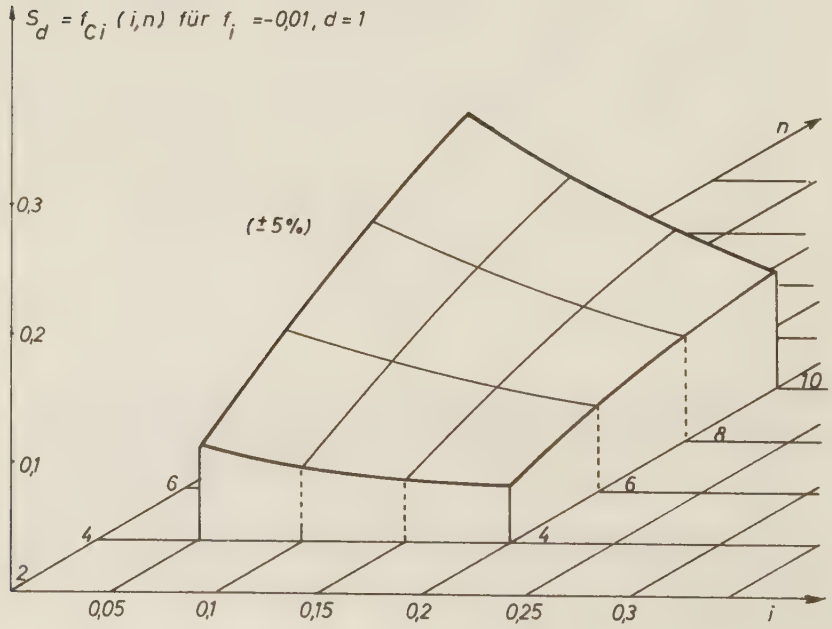
Da diesmal drei unabhängige Variable den Fehlerverlauf bestimmen, benötigt man zur graphischen Einzeldarstellung neun Figuren. Die Verläufe zeigen einen sehr ähnlichen Charakter, deshalb soll hier nur das Fehlerverhalten für die Degressionsrate 1,10 stellvertretend für die Fehlerverläufe bei allen Degressionsraten graphisch dargestellt werden. Die Figuren 15 und 16 lassen den Zinsfehlerverlauf bei degressiver Gewinnabnahme erkennen.

Der Fehlerfaktor S_d als Funktion des Zinses und der Zeit

$$S_d = f_{Ci}(i,n) \text{ für } f_i = -0{,}01 \text{ , } d = 1$$



15 a Figur 15 15 b



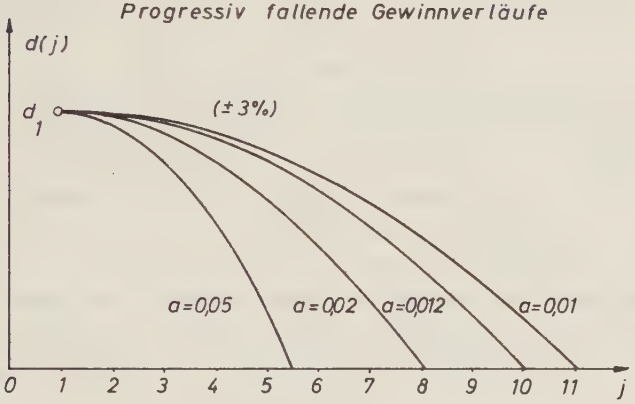
Figur 16

e. Darstellung des Zinsfehlers bei progressiv fallenden Gewinnen

Zur Darstellung der jährlichen Gewinne als Funktion der Zeit mit progressiv fallendem Verlauf eignet sich der Ansatz einer quadratischen Funktion. Ein Koeffizient a bestimmt das Maß der Gewinnabnahme.

$$d_j = d_1(1 - a(j-1)^2) \qquad (48)\ (d_1=d)$$

Progressiv fallende Gewinnverläufe



Figur 17

Setzt man diese Gewinnfunktion in die Gleichung zur Fehlerermittlung ein, so erhält man:

$$-f_{Ci} = d\left(\sum_{j=1}^{n} j(1-a(j-1)^2)q^{-j-1}\right) f_i \qquad (49)$$

$$-f_{Ci} = d\, S_p\, f_i$$

Die Summe S_p stellt einen relativ komplizierten Ausdruck dar:

$$S_p = \frac{1}{q^2} + \frac{2(1-1^2a)}{q^3} + \frac{3(1-2^2a)}{q^4} + \ldots + \frac{n(1-(n-1)^2a)}{q^{n+1}}$$

Die einzelnen Brüche kann man auseinanderziehen und den Faktor a ausklammern:

$$S_p = \left(\frac{1}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \ldots + \frac{n}{q^{n+1}}\right) - \frac{a}{q^2}\left(\frac{2\cdot 1^2}{q} + \frac{3\cdot 2^2}{q^2} + \ldots + \frac{n(n-1)^2}{q^{n-1}}\right)$$

$$\boxed{S_p = \frac{1-q^{-n}}{i^2} - \frac{nq^{-n-1}}{i} - a \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)j^2q^{-j-2}} \quad (50)$$

Die Summe, die hinter dem Faktor a steht, läßt sich auch als Summenformel schreiben, doch besitzt diese eine recht komplizierte Form. Man erhält sie über einen Umweg:

Integriert man die Summe zweimal nach dq , so wird daraus:

$$\iint \sum_{j=1}^{n-1} \left((j+1)j^2q^{-j-2}\, dq\right) dq = \sum_{j=1}^{n-1} jq^{-j} = {}''S_z$$

Diese Summe ist schon bekannt und ergibt:

$${}''S_z = \frac{(1 - q^{-n+1})q}{i^2} - \frac{(n-1)q^{-n+1}}{i}$$

Differenziert man nun diesen Ausdruck zweimal nach dq , so erhält man die gewünschte Summenformel. Durch die zweimalige Differentiation gestaltet sich das Ergebnis komplizierter, weil auch der Nenner die Variable q enthält, $i = q - 1$. Für eine Nutzungsdauer unter zehn Jahren rechnet man einfacher

sukzessive die einzelnen Summenglieder aus und addiert sie, als die Werte in eine komplizierte Summenformel einzusetzen. Für eine längere Nutzungsdauer als zehn Jahre setzt man am einfachsten den Fehler für konstante Gewinne an, weil dieser das erste Glied des Faktors S_p bildet (vgl. Formel 38).

Betrachtet man den Verlauf des Fehlerfaktors S_p für a = 0,01235 , einen Koeffizienten, der die Gewinne nach zehn Jahren auf null zusammenschmelzen läßt, so ergibt sich die folgende Tabelle 5 .

Tabelle der Fehlerfaktoren
für progressiv fallende Gewinne (a = 0,01235)

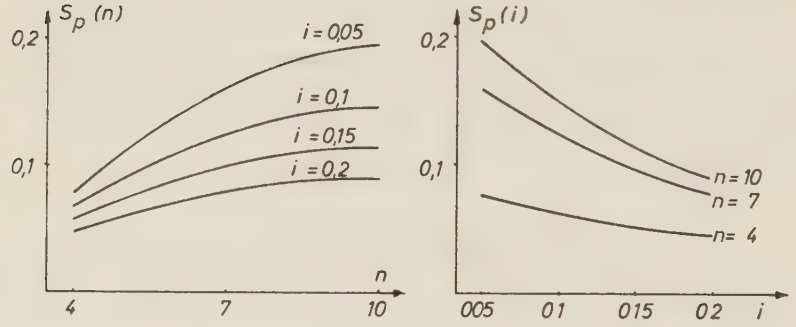
Zinsfuß i	Fehlerfaktor S_p für die Nutzungsdauer		
	4	7	10
0,05	7,8	16	19
0,10	6,5	13	15
0,15	5,5	10	11
0,20	4,6	8,0	8,9

Tabelle 5

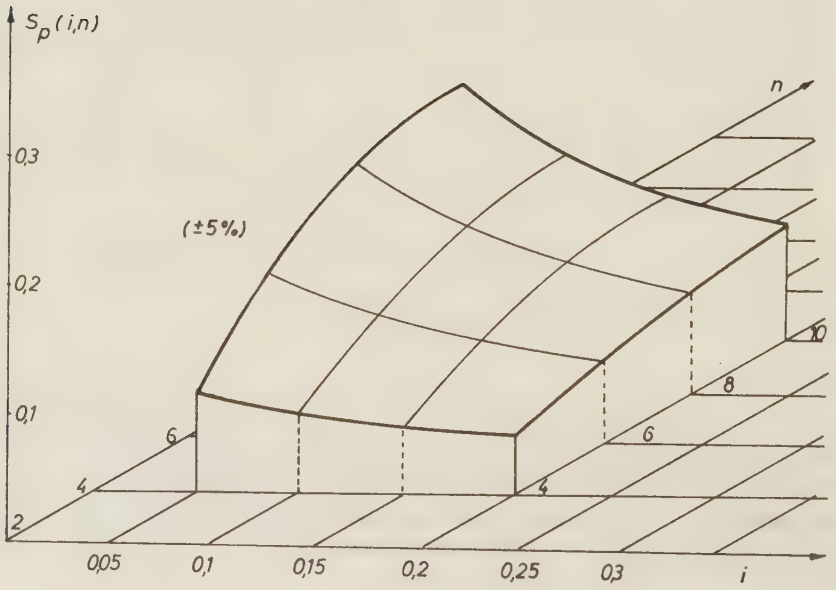
Die Figuren 18 und 19 zeigen graphisch den Verlauf des Zinsfehlers des Kapitalwertes für eine Zinsabweichung von einem Prozent und einem Gewinn von einer Geldeinheit im ersten Nutzungsjahr.

Der Fehlerfaktor S_p als Funktion des Zinses und der Zeit

$$S_p = f_{Ci}\,(i,n) \quad \text{für } f_i = -0{,}01;\ d = 1$$



18 a Figur 18 18 b



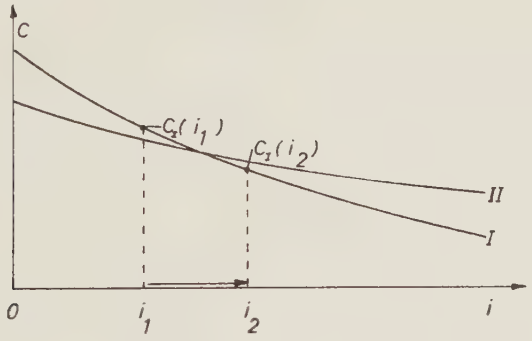
Figur 19

4. Reaktion der Modellergebnisse auf Zinsschwankungen

a. Die Stabilität des Investitionsvergleichs in der Kapitalwertmethode gegenüber Zinsschwankungen

Betrachtet man eine Investition, die im Zeitpunkt o eine Auszahlung und zu allen folgenden Zeitpunkten bis an das Ende der Nutzungsdauer Einzahlungsüberschüsse aufweist, so sinkt der Kapitalwert dieser Investition mit steigendem Kalkulationszinsfuß. E. SCHNEIDER zeigt graphisch[1], daß mit variierendem Kalkulationszinsfuß die Kapitalwerte zweier zu vergleichender Investitionsobjekte gegebenenfalls so sehr schwanken, daß für einen Kalkulationszinsfuß die eine, für einen anderen die zweite Investition vorteilhafter erscheint (vgl. Figur 20)[2].

Der zinsabhängige Kapitalwertverlauf



Figur 20

Diese Empfindlichkeit des Kapitalwertvergleichs auf Zinsschwankungen soll analytisch etwas eingehender untersucht werden.

Zwei Investitionen werden verglichen. Ihre Anschaffungsausgaben betragen A_{o1} und A_{o2}, die Gewinne des ersten Jahres d_{11} und d_{12} und ihre Kapitalwerte C_1 und C_2. Die Gewinne der beiden Investitionen mögen nach der gleichen

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S. 41ff.

[2] Die betrachteten Investitionen sollen Normalinvestitionen des Typus I im Sinne der von E.Schneider formulierten Definition darstellen. Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.11ff und S. 20f.

zeitlichen Funktion $h(j)$ verlaufen.

$$d_{j1} = d_{11}\, h(j)$$

$$d_{j2} = d_{12}\, h(j)$$

Die Kapitalwerte betragen, wenn die Nutzungsdauer gleich lang ist:

$$C_1 = -A_{o1} + d_{11} \cdot \sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j} \qquad (51)$$

$$(h(j) > 0) \quad (q \geqq 1) \quad (C_1, C_2 > 0)$$

$$C_2 = -A_{o2} + d_{12} \cdot \sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j} \qquad (52)$$

Der Kapitalwert C_1 kann größer sein als der Kapitalwert C_2, wenn eine der nachfolgend aufgezählten Bedingungen erfüllt ist:

$C_1 > C_2$

1. $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} = A_{o2}$
2. $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} > A_{o2}$
3. $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$
4. $d_{11} < d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$
5. $d_{11} = d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$

Die nicht aufgeführten Kombinationen drehen die Ungleichung der beiden Kapitalwerte um. Sie sind in den betrachteten Fällen enthalten, wenn man die Investitionen vertauscht.

Für diese fünf Kombinationsmöglichkeiten der Kapitalwertvergleiche soll die Zinsempfindlichkeit untersucht werden.

1. $C_1 > C_2$, $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} = A_{o2}$

Um die Auswirkungen von Zinsfehlern auf die Beziehung zwischen den beiden verglichenen Kapitalwerten zu untersuchen, genügt es, die Kapitalwerte etwas genauer zu beleuchten. Zieht man von beiden den gemeinsamen Anschaffungswert ab, so erhält man die Ungleichung:

$$d_{11} \sum_{j=1}^{n} h(j)q^{-j} \quad > \quad d_{12} \sum_{j=1}^{n} h(j)q^{-j}$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich ohne jede weitere Rechnung als Ergebnis, daß die Ungleichung für jeden positiven Zinsfuß erfüllt wird. Das Vergleichsergebnis zweier Investitionen von diesem Charakter ist gegen Zinsschwankungen stabil.

2. $C_1 > C_2$, $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} > A_{o2}$

Zwei Investitionen besitzen wieder die gleiche zeitliche Gewinnfunktion, doch sind die Gewinne und die Anschaffungswerte verschieden. Da der Anschaffungswert der ersten Anlage größer ist als der der zweiten und die erste bei dem gegebenen Zinsfuß i mehr Gewinn bringt als die zweite, ergibt sich die Ungleichung $C_1 > C_2$. Für einen anderen Zinsfuß kann jedoch die Differenz der Anschaffungswerte höher sein als die Differenz der mit dem anderen Zinsfuß diskontierten Gewinne. Der Fall wird analysiert. Der Zinsfuß i ändert sich um f_i in den Wert i_w.

$$f_i = i - i_w \qquad (53)$$

Die Kapitalwerte ändern sich durch die Zinsverschiebung ebenfalls.

$$C_{w1} = C_1 - f_{Ci1}$$
$$C_{w2} = C_2 - f_{Ci2} \qquad (54)$$

Aus Gleichung 35 ist zu entnehmen, daß von einem positiven

Fehler des Zinsfußes f_i eine negative Abweichung des Kapitalwertes verursacht wird.

Die Zinsänderung pflanzt sich in der folgenden Weise fort: Eine positive Zinsänderung ($i < i_w$) besitzt nach der Fehlerdefinition einen negativen Fehler ($f_i < 0$). Der Zinsfehler des Kapitalwertes nimmt einen positiven Wert an ($f_{Ci} > 0$) und der neue Kapitalwert sinkt dadurch unter den ursprünglichen ($C_w < C$). Ein Ansteigen des Zinssatzes bewirkt ein Sinken des Kapitalwertes und umgekehrt[1].

Der Zinsfehler des Kapitalwertes f_{Ci} kann für den Gewinnverlauf $d_j = d_1 h(j)$ auf gleiche Weise ermittelt werden wie für die gezeigten vier Gewinnverläufe.

$$f_{Ci} = -f_i d_1 \sum_{j=1}^{n} jh(j) q^{-j-1} \qquad (55)$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen wird durch S' symbolisiert:

$$f_{Ci} = -f_i d_1 S' \qquad (56)$$

Dieser Ausdruck wird in die Gleichungen für C_{w1} und C_{w2} eingesetzt und verändert diese in:

$$C_{w1} = C_1 + f_i d_{11} S'$$
$$C_{w2} = C_2 + f_i d_{12} S' \qquad (57)$$

Sinkt der Zinsfuß i_w unter den Zinsfuß i, dann ist f_i positiv und die Zunahme des Kapitalwertes C_1 um $f_i d_{11} S'$ ist größer als die Zunahme des Kapitalwertes C_2 um $f_i d_{12} S'$, weil ja d_{11} d_{12} übersteigt. Die Reihenfolge der Investitionen C_1 vor C_2 nach der Höhe des Kapitalwertes gesehen bleibt für sinkende Zinssätze stabil.

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S. 41f.

Steigende Zinssätze bringen einen negativen Fehler f_i mit sich. C_1 nimmt um einen größeren Betrag ab als C_2, daraus kann sich die Möglichkeit ergeben, daß die Reihenfolge bei einer gewissen Fehlergröße umgedreht wird. Der Umkehrpunkt der Ungleichung ist dadurch gekennzeichnet, daß sich diese in eine Gleichung verwandelt.

$$C_1 + d_{11} f_i S' = C_2 + d_{12} f_i S'$$

Für C_1 und C_2 werden die Funktionen von d_{11} und d_{12} eingesetzt:

$$-A_{o1} + d_{11} \sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j} + d_{11} f_i S' = -A_{o2} + d_{12} \sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j} + d_{12} f_i S'$$

Nach dem Ausklammern von d_{11} und d_{12} kann man die Gleichung umordnen:

$$\sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j} + f_i S' = \frac{A_{o1} - A_{o2}}{d_{11} - d_{12}}$$

Nach f_i aufgelöst ergibt sich, wenn für S' die Summe eingesetzt wird:

$$f_i = \frac{A_{o1} - A_{o2}}{(d_{11} - d_{12}) \sum_{j=1}^{n} j h(j) q^{-j-1}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} h(j) q^{-j}}{\sum_{j=1}^{n} j h(j) q^{-j-1}} \qquad (58)$$

Der Fehler f_i besitzt einen negativen Wert, weil der zweite Bruch größer als der erste ist. Der für diesen Umkehrpunkt der Ungleichung mit den Kapitalwerten ermittelte Fehler besitzt nur in einem eingeschränkten Bereich Gültigkeit. Große

Fehler dürfen auf diese Art nicht berechnet werden, weil die erste Ableitung der Summenformel S' nur in der Umgebung des Punktes C_1 beim ursprünglichen Kapitalwert i die richtige Steigung der Kapitalwertkurve wiedergibt.

Zusammenfassend kann für den Fall 2. ausgesagt werden:
Die Reihenfolge der Investitionen C_1 vor C_2 bleibt für sinkende Zinssätze stabil, für steigende Zinssätze ist die Reihenfolge unstabil.

3. $C_1 > C_2$, $d_{11} > d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$

In diesem Investitionsvergleich ist die Anschaffungsausgabe A_{o1} der ersten Anlage geringer als die für die zweite A_{o2} , obwohl die erste einen größeren Gewinn erwirtschaftet. Auf gleiche Weise wie im ersten Fall kann man aus der Ausgangsungleichung schließen, daß bei jedem positiven Zinsfuß die Reihenfolge der Kapitalwerte erhalten bleibt.

Die Reihenfolge ist gegen Zinsschwankungen stabil.

4. $C_1 > C_2$, $d_{11} < d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$

Obwohl die diskontierten Gewinne des zweiten Investitionsobjektes überwiegen, bewirkt seine höhere Anschaffungsausgabe einen Kapitalwertvorteil des ersten Investitionsobjektes.

$$C_1 + d_{11} f_i S' > C_2 + d_{12} f_i S'$$

Ein Ansteigen des Zinsfußes bringt einen negativen Zinsfehler mit sich ($f_i < 0$). Das Produkt $d_{12} f_i S'$ ist in diesem Fall größer als $d_{11} f_i S'$ und läßt die rechte Seite der Ungleichung in stärkerem Maße sinken als die linke. Die Ungleichung bleibt für Zinssteigerungen erhalten. Die Reihenfolge verhält sich stabil gegen eine Zunahme des Zinsfußes.

Sinkt der Zinsfuß, so ist der Fehler f_i positiv, und die rechte Seite der Ungleichung steigt schneller als die linke. Dieser Tatbestand ermöglicht ein Umschwenken der Ungleichung.

Befindet sich der Umkehrpunkt in der Nähe des ursprünglichen Zinsfußes i, so kann er auf gleiche Weise wie im Fall 2. ermittelt werden:

$$f_i = \frac{A_{o1} - A_{o2}}{(d_{11} - d_{12}) \sum_{j=1}^{n} jh(j)q^{-j-1}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} h(j)q^{-j}}{\sum_{j=1}^{n} jh(j)q^{-j-1}} \qquad (59)$$

Diesmal besitzt der linke Bruch einen größeren Wert als der rechte, der Fehler ist positiv. Bringt man beide Brüche auf einen Nenner, indem der rechte mit $d_{11} - d_{12}$ erweitert wird, so steht im Zähler die Differenz der Kapitalwerte. Über diesen Rechenschritt und der Annahme, daß der erste Kapitalwert größer als der zweite ist, kann man ohne Rechnung das Fehlervorzeichen bestimmen.

Für den vierten Fall läßt sich zusammenfassend aussagen: Die Reihenfolge der Kapitalwerte C_1 vor C_2 ist für steigende Zinssätze stabil und für sinkende Zinssätze unstabil.

5. $C_1 > C_2$, $d_{11} = d_{12}$, $A_{o1} < A_{o2}$

In diesem Kapitalwertvergleich ohne Gewinnunterschied bestimmt nur die Differenz der Anschaffungsausgaben die Reihenfolge der Kapitalwerte. Die Anschaffungsausgabe fällt zum Zeitpunkt o an und unterliegt daher keiner Verzinsung. So haben auch Zinsschwankungen keinen Einfluß auf die Reihenfolge der Kapitalwerte, sie ist für alle Zinsveränderungen stabil.

Als sechster Fall kann zusammen mit dem fünften auch noch ein Sonderfall betrachtet werden. Wenn $d_{11} = d_{12}$ und $A_{o1} = A_{o2}$ ist, kann man die Reihenfolge willkürlich wählen. Sie ist aus den obengenannten Gründen ebenfalls gegen Zinsschwankungen stabil.

Aus den Ergebnissen der Untersuchung der Stabilität der fünf verschiedenen Kombinationen von Gewinn und Anschaffungsausgabe ergibt sich eine Stabilitätstabelle für die Reihenfolge $C_1 > C_2$.

Stabilitätstabelle für einen Kapitalwertvergleich

Beziehung der Gewinne des 1. Jahres	Verhalten der Reihenfolge $C_1 > C_2$ gegenüber Zinsänderungen für					
	$A_{o1} < A_{o2}$		$A_{o1} = A_{o2}$		$A_{o1} > A_{o2}$	
	$i < i_w$	$i > i_w$	$i < i_w$	$i > i_w$	$i < i_w$	$i > i_w$
$d_{11} < d_{12}$	stabil	unstab.	---	---	---	---
$d_{11} = d_{12}$	stabil	stabil	stabil	stabil	---	---
$d_{11} > d_{12}$	stabil	stabil	stabil	stabil	unstab.	stabil

Tabelle 6

Die Stabilitätstabelle zeigt, daß im Kapitalwertvergleich von Investitionen mit gleichen Gewinnfunktionen ($d_j = d_1 h(j)$) Zinsschwankungen nur in zwei Fällen einen Einfluß auf die Reihenfolge der Kapitalwerte besitzen; alle anderen Fälle verhalten sich stabil.

b. Die Stabilität der Vorteilhaftigkeit in der Kapitalwertmethode gegenüber Zinsschwankungen

Eine betriebliche Investition wird als vorteilhaft definiert, wenn sie einen positiven Kapitalwert besitzt[1] ($C \geq 0$). Eine Investition mit folgendem monetärem Aufbau soll betrachtet werden: Zum Zeitpunkt null findet eine Auszahlung statt, die Anschaffungsausgabe A_o , zu allen folgenden Zeitpunkten j bestehen Einzahlungsüberschüsse in der Höhe d_j . Diese Gewinne verlaufen nach einer Funktion der Zeit und des ersten Gewinnes d_1 , $d_j = d_1 h(j)$. Die Investition besitzt bei dem Zinsfuß i

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.22ff.

einen positiven Kapitalwert C_1 .

Eine Zinssenkung erhöht den Barwert der Gewinne, weil die später anfallenden nun stärker in Erscheinung treten; sie bewirkt damit gleichzeitig, daß der Kapitalwert der Investition zunimmt. Eine Zinserhöhung senkt den Barwert der Gewinnfolge und damit auch den Kapitalwert. Durch die Zinserhöhung kann der Kapitalwert vom positiven Bereich in den negativen überwechseln.

$$C_{1w} = C_1 + f_i d_1 S'$$

Im kritischen Punkt der Vorteilhaftigkeit besitzt der Kapitalwert der Investition den Wert null. Wird der kritische Punkt durch einen kleinen Fehler erreicht, so läßt sich dieser auf folgendem Wege abschätzen:

$$C_1 + f_i d_1 S' = 0$$

Daraus ergibt sich f_i zu:

$$f_i = \frac{-C_1}{d_1 S'}$$

Setzt man die Werte für C_1 und S' ein, zeigt sich:

$$f_i = \frac{A_o}{d_1 \sum_{j=1}^{n} jh(j)q^{-j-1}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} h(j)q^{-j}}{\sum_{j=1}^{n} jh(j)q^{-j-1}} \qquad (60)$$

Da C_1 größer als null ist, besitzt der zweite Bruch einen höheren Wert als der erste und der Fehler einen negativen Wert.

Die Vorteilhaftigkeit einer Investition verhält sich stabil gegenüber Zinssenkungen und unstabil gegenüber Zinserhöhungen. Der Ansatz eines genügend hohen Kalkulationszinsfußes bei der Ermittlung der Vorteilhaftigkeit geplanter Investitionen bewirkt, daß eine günstige Investition bei jedem niedriger eintretenden Zinsfuß vorteilhaft bleibt; Enttäuschungen werden vermieden.

5. Die Empfindlichkeit des Kapitalwertes gegen Abweichungen der Einnahmen und Ausgaben

Die Einnahmen und Ausgaben bauen die Folge der monetären Elemente des Kapitalwertmodells auf. Eine Abweichung ihrer Größe hat Veränderungen im Kapitalwert zur Folge. Die Abweichung des Kapitalwertes durch diese Fehler soll durch f_{Cd} symbolisiert werden, die Fehler der Beträge selbst durch f_{dj}. Der Fehler des Kapitalwertes f_{Cdj} durch die Änderung eines einzelnen Gliedes berechnet sich aus der Fehlerformel:

$$f_{Cdj} = \frac{\delta C}{\delta d_j} f_{dj}$$

$$\boxed{f_{Cdj} = f_{dj} q^{-j}} \qquad (61)$$

Der Kapitalwert wird aus einer Summe gebildet, deshalb setzt sich der Gesamtfehler auch aus der Summe der Einzelfehler zusammen (vgl. (4)).

$$\boxed{f_{Cd} = f_{do} + f_{d1} q^{-1} + f_{d2} q^{-2} + \dots + f_{dn} q^{-n}} \qquad (62)$$

Werden die Gewinne nicht mit einer absoluten, sondern mit einer relativen Abweichung vorgegeben, so ersetzt das Produkt aus relativem Fehler multipliziert mit dem Gewinn den absoluten Fehler.

$$f_{dj} = f_{rdj} d_j$$

$$\boxed{f_{Cd} = f_{rdo} d_o + f_{rd1} d_1 q^{-1} + f_{rd2} d_2 q^{-2} + \dots + f_{rdn} d_n q^{-n}} \qquad (63)$$

Der relative Fehler des Kapitalwertes besteht aus dem Quotienten absoluter Fehler durch Kapitalwert. Nach Formel 5 liegt der relative Fehler einer Summe zwischen dem größten und dem kleinsten relativen Fehler der einzelnen Summanden.

$$\boxed{f_{rdj\,max} < f_{rCd} < f_{rdj\,min}} \qquad (64)$$

Besitzen alle Summanden den gleichen relativen Fehler f_{rd}, dann wird der absolute Fehler zu:

$$f_{Cd} = f_{rd} \left(d_o + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + d_3 q^{-3} + \ldots + d_n q^{-n} \right)$$

In der Klammer steht der Kapitalwert der Investition. Zur Ermittlung des relativen Fehlers des Kapitalwertes wird der absolute Fehler durch den Kapitalwert dividiert. Das Ergebnis zeigt:

$$\boxed{f_{rCd} = f_{rd}} \qquad (65)$$

Besitzen alle Gewinne (Verluste) den gleichen relativen Fehler, so ist dieser gleich dem relativen Fehler des Kapitalwertes.

Die Gewinne oder Verluste ergeben sich als Differenz der Einnahmen- und Ausgabenbeträge. Der absolute Fehler einer Differenz besteht aus der Summe der Fehler von Minuend und Subtrahend. Der relative Fehler einer Differenz kann sehr groß werden, besonders dann, wenn die Differenz einen kleinen Wert ergibt. Gibt man die Gewinne in Prozenten der Einnahmen an, so kann man Grenzen von Abweichungen für die Einnahmen und Ausgaben bestimmen, die eingehalten werden müssen, soll der relative Fehler f_{rd} des Gewinnes eine bestimmte Größe nicht überschreiten.

Beispielsweise betrage der höchste zulässige relative Fehler des Gewinnes 10% , der Gewinn soll 50% der Einnahmen ausmachen, dann darf der relative Fehler der Einnahmen höchstens 5% erreichen, wenn die Ausgaben keinen Fehler enthalten. Die relative Abweichung der Ausgaben darf höchstens 10% ausmachen, wenn die Einnahmen fehlerfrei ermittelt sind. Die höchste zulässige Einzelabweichung liegt unter den angegebenen Werten, wenn beide Eingangsgrößen fehlerbehaftet sind.

In einem Diagramm mit den relativen Ausgabenfehlern als Abszisse und den relativen Einnahmenfehlern als Ordinate kann eine

Kurve gleichen Gesamtfehlers für einen bestimmten Gewinn konstruiert werden. Der Kurvenverlauf läßt sich folgendermaßen berechnen.

Der Gewinn stellt die Differenz aus Einnahmen und Ausgaben dar.

$$d = e - a$$

Der Fehler der Differenz besteht aus der Summe der Einzelfehler.

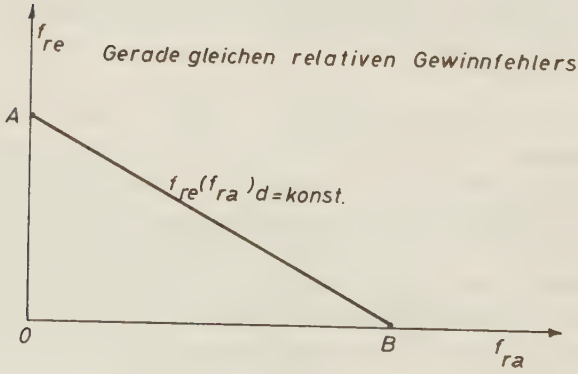
$$f_d = f_e + f_a$$

Der relative Fehler ergibt sich als Quotient aus absolutem Fehler und Gewinn.

$$f_{rd} = \frac{f_e + f_a}{e - a} = \frac{ef_{re} + af_{ra}}{e - a} \qquad (66)$$

Diese Gleichung zeigt nach f_{re} aufgelöst, daß die gesuchte Kurve eine Gerade ist.

$$f_{re} = \frac{f_{rd}(e-a)}{e} - \frac{a}{e} f_{ra} \qquad (67)$$

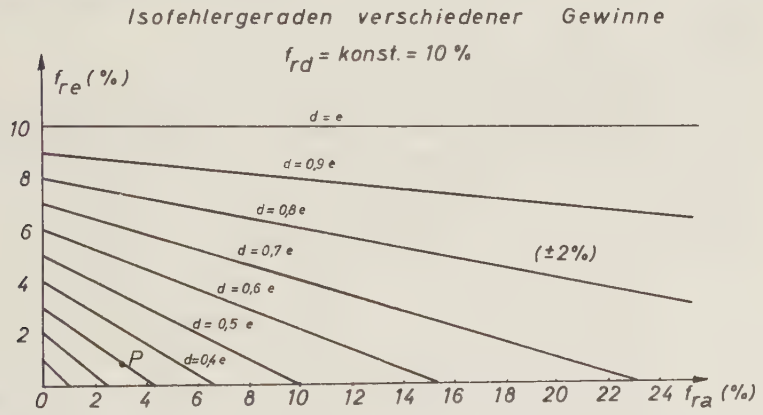


Figur 21

Zur Konstruktion der Geraden setzt man bei bekanntem Gewinn und

und relativem Gewinnfehler zuerst f_{re} = null und ermittelt den Punkt B, anschließend setzt man den relativen Ausgabenfehler f_{ra} = null und bestimmt den Punkt A . Die Verbindungslinie der beiden Punkte stellt den geometrischen Ort für alle Kombinationen mit gleichem relativen Gewinnfehler dar, sie beschreibt eine Isofehlerkurve.

Jeder Gewinnbetrag, der einen anderen Prozentsatz der Einnahmen ausmacht, besitzt für den gleichen relativen Fehler eine neue Gerade im f_{re}-f_{ra}-Diagramm. Alle Isofehlergeraden in dem Diagramm für einen vorgegebenen Gesamtfehler und verschiedene Gewinne schneiden sich in einem Punkt. Figur *22* zeigt eine Schar Isofehlerkurven für einen relativen Gesamtfehler von 10% und verschiedene Gewinne, die in Prozenten der Einnahmen ausgedrückt sind.



Figur 22

Der Drehpunkt besitzt die Koordinaten f_{re} = 10% , f_{ra} = -10%.

Im dreidimensionalen Diagramm beschreibt die Funktion aus relativen Einnahmen- und Ausgabenfehlern und Gewinnen in Prozenten von den Einnahmen eine Isofehlerfläche mit dem relativen Gesamtfehler als Parameter, wie Figur *23* zeigt. Für andere relative Gesamtfehler bilden sich neue Flächen.

Die Werte für einzelne Isofehlerflächen sind in der folgenden tabellarischen Aufstellung enthalten. Es wurden dabei die relativen Ausgabenfehler für drei Isofehlerflächen berechnet. Die Parameter der Isofehlerflächen f_{rd} betragen 10%, 20% und 30%.

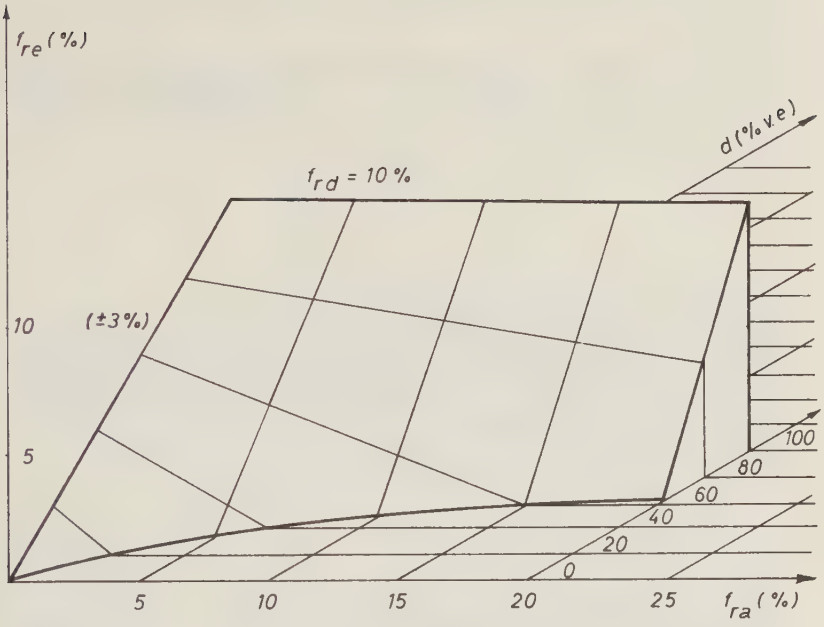
Aufstellung der relativen Ausgabenfehler f_{ra} für verschiedene Gewinne, relative Gewinnfehler und relative Einnahmenfehler f_{re}.

f_{rd}(%)	d(% v.e)	f_{re}(%)					
		0	2	4	6	8	10
10	20	2,5	0	-	-	-	-
	40	6,7	3,3	0	-	-	-
	60	15	10	5	0	-	-
	80	40	30	20	10	0	-
	100	∞	∞	∞	∞	∞	∞
20	20	5	2,5	0	-	-	-
	40	13	10	6,7	3,3	0	-
	60	30	25	20	15	10	5
	80	80	70	60	50	40	30
	100	∞	∞	∞	∞	∞	∞
30	20	7,5	5	2,5	0	-	-
	40	20	17	13	10	6,7	3,3
	60	45	40	35	30	25	20
	80	120	110	100	90	80	70
	100	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Tabelle 7

Die Isofehlerfläche mit dem Parameter $f_{rd} = 10\%$ wird in Figur 23 graphisch dargestellt.

Darstellung einer Isofehlerfläche



Figur 23

Die Diagramme zeigen, daß bei relativ geringen Gewinnen die Angaben über Einnahmen und Ausgaben sehr genau sein müssen, soll der Fehler innerhalb der 10% Grenze bleiben. Für einen Gewinn von 30% der Einnahmen darf bei einem Einnahmenfehler von 1% der Ausgabenfehler nicht mehr als 3% betragen. Punkt P in Figur *22* zeigt diese Fehlerkombination an. Für kleinere Gewinne verengen sich die relativen Fehlergrenzen der Elemente noch weiter.

Die Auswirkung von Zins- und Gewinnfehlern können einander entgegenwirken oder aber sich addieren. Die Wirkung des Zinsfehlers ist häufig gering gegenüber der Wirkung prozentual

gleicher Einnahmen- und Ausgabenabweichungen. Dieser Tatbestand kann an einem Zahlbeispiel demonstriert werden.

Beispiel:

Eine Investition besteht aus einer Anfangsausgabe A_o = DM 287, einem konstanten Einnahmenstrom und einem konstanten Ausgabenstrom.

$$e_j = \text{DM } 333$$
$$a_j = \text{DM } 233$$
$$n = 7 \text{ Jahre}$$

Der relative Fehler der Einnahmen beträgt 1%, der relative Fehler der Ausgaben 3%. Der Kalkulationszinsfuß i beträgt 0,1 und schwanke um 0,01 oder 10%. Gesucht wird der Gesamtfehler des Kapitalwertes.

Der Kapitalwert C hat die Größe:

$$C = -A_o + (e-a) \sum_{j=1}^{n} (1,1)^{-j} = -287 + 487 = \underline{\text{DM } 200}$$

Der Zinsfehler besteht aus dem Produkt $f_i d\, S_k$. S_k zeigt die Tabelle 2 mit 16,02 an.

$$f_{Ci} = 0,01 \cdot 100 \cdot 16,02 = \underline{\text{DM } 16}$$

Der relative Zinsfehler des Kapitalwertes beträgt:

$$16 : 200 = \underline{0,08}$$

Der Fehler des jährlichen Gewinns beträgt nach Formel *66* :

$$f_{rd} = \frac{333 \cdot 0,01 + 233 \cdot 0,03}{333 - 233} = \underline{0,1}$$

Dieser Fehler pflanzt sich als gleicher relativer Fehler in den Barwert der Gewinne fort, beträgt also insgesamt 0,1 des Gewinnbarwertes von 487 DM. Der Gewinnfehler im Kapitalwert beträgt 0,1 . 487 = <u>DM 48,7</u> . Der relative Gewinnfeh-

ler f_{rCd} des Kapitalwertes ergibt sich daraus zu:

$$48{,}7 \;:\; 200 \;=\; \underline{0{,}24}$$

Der absolute Gesamtfehler des Kapitalwertes besteht aus der Summe der Einzelfehler:

$$f_C = f_{Ci} + f_{Cd} = \text{DM } 16 + \text{DM } 48{,}7 = \underline{\text{DM } 64{,}7}$$

$$f_{rC} = 64{,}7 \;:\; 200 \;=\; 0{,}32 \;=\; \underline{32\%}$$

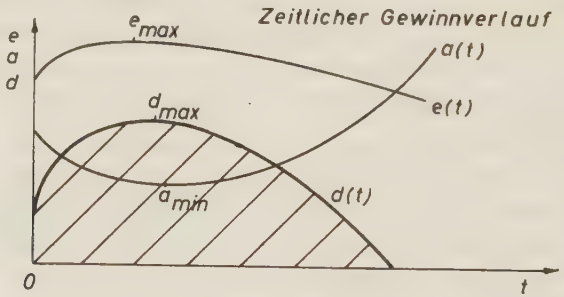
Das Ergebnis der Fehlerabschätzung zeigt, daß trotz der recht geringen Eingangsfehler (1%, 3%) für die Einnahmen und Ausgaben der Fehler des Kapitalwertes hauptsächlich durch sie verursacht wird. Treten diese Eingangsfehler in der gleichen Größenordnung auf wie der Zinsfehler, also als 10% des Schätzwertes beispielsweise, dann wächst der Kapitalwertfehler noch beträchtlich. Der relative Gewinnfehler steigt auf 56,6%, der relative Fehler des Kapitalwertes übersteigt dann 100%.

Dieses Beispiel deutet an, wie sehr der Ermittlung der Einnahmen und Ausgaben Bedeutung zukommt. Auch wenn sich nicht alle Fehler addieren, sondern ein Teil dem anderen entgegenwirkt, müssen enge Fehlergrenzen der Eingangsgrößen eingehalten werden, sonst nimmt der Gesamtfehler des Kapitalwertes zu große Dimensionen an.

6. Die optimale Nutzungsdauer einer einzelnen Anlage

Eine besondere Anwendung der Kapitalwertmethode besteht in der Ermittlung der im wirtschaftlichen Sinne optimalen Nutzungsdauer einer Anlage[1]. Da die Gewinnmaximierung das Entscheidungskriterium bildet, wird das Problem durch die Fragestellung formuliert: Wie lange soll eine Anlage genutzt werden, damit ihr Kapitalwert maximal ist?

Für den zeitlichen Verlauf der Kosten und Erträge besteht eine Forderung, um eine optimale Nutzungsdauer bestimmen zu können: Die Erträge sollen höchstens ein Maximum durchlaufen und dann monoton fallen[2]. - Die Kosten sollen höchstens ein Minimum durchlaufen und dann monoton wachsen. Die Gewinne durchlaufen also höchstens ein Maximum und fallen danach monoton, vgl. Figur 24 .



Figur 24

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Die wirtschaftliche Lebensdauer industrieller Anlagen, in: Weltwirtschaftliches Archiv Bd. 55 Kiel 1942, S.92ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.75ff.
Holler, A.: Die Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer von Anlagen, Diss. Münster 1962, S.15ff.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.45ff.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.60ff.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, Köln und Opladen 1961.

[2] Eine Funktion heißt monoton fallend, wenn sie nicht wieder ansteigt. Eine Funktion heißt monoton wachsend, wenn sie nicht wieder fällt.
Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch..., a.a.O. S.229

Wie aus der Definition monotoner Funktionen hervorgeht, sind die vier betrachteten Gewinnverläufe in diesen Voraussetzungen inbegriffen.

Die Bedingungen für die optimale Nutzungsdauer lassen sich ermitteln. Bezeichnet man den Kapitalwert der Anlage C_n, wenn die Nutzungsdauer n Jahre beträgt und C_{n-1} bzw. C_{n+1}, wenn sie $n-1$ bzw. $n+1$ Jahre beträgt, so umfaßt die optimale Nutzungsdauer n Jahre, wenn der Wert C_n der maximal erreichbare ist. Das bedeutet:

$$C_{n-1} < C_n \qquad \text{oder} \qquad C_n - C_{n-1} > 0$$

$$C_{n+1} < C_n \qquad \text{oder} \qquad C_n - C_{n+1} > 0$$

Ohne Berücksichtigung eines Restwertes können die Kapitalwerte als folgende Summen eingesetzt werden:

$$\sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j)q^{-j} - \sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} > 0$$

Man sondert aus der linken Summe das n-te Glied aus und erhält:

$$\sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} + (e_n - a_n)q^{-n} - \sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf, es bleibt:

$$(e_n - a_n)\, q^{-n} > 0$$

Beide Seiten dieser Ungleichung werden durch q^{-n} dividiert und danach wird auf beiden Seiten a_n addiert.

$$\boxed{e_n > a_n} \qquad (68)$$

Im letzten Jahr der optimalen Nutzungsdauer sollen die Ein-

nahmen einen höheren Betrag ausmachen als die Ausgaben.

Die zweite Ungleichung läßt sich ebenfalls aus Summen aufbauen:

$$C_n - C_{n+1} > 0$$

$$\sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j) q^{-j} - \sum_{j=o}^{n+1} (e_j - a_j) q^{-j} > 0$$

Aus der zweiten Summe wird das Glied mit dem Index $n+1$ ausgesondert:

$$\sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j) q^{-j} - \sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j) q^{-j} - (e_{n+1} - a_{n+1}) q^{-n-1} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf, es bleibt übrig:

$$-(e_{n+1} - a_{n+1}) q^{-n-1} > 0$$

Nach einer Division durch q^{-n-1} besagt die Ungleichung:

$$\boxed{e_{n+1} < a_{n+1}} \qquad (69)$$

Die Nutzungsdauer von n Jahren ist optimal, wenn die Ausgaben im darauffolgenden Jahr größer als die Einnahmen sind.

Beide Bedingungen besagen zusammengefaßt, daß die wirtschaftlich optimale Nutzungsdauer zu dem Zeitpunkt erreicht wird, an dem die Differenz der Einnahmen minus den Ausgaben vom Positiven ins Negative wechselt.

Die Anlagen besitzen häufig einen Restwert, der auf die Nutzungsdauer einen gewissen Einfluß ausübt. Wird er mit berücksichtigt, so lautet das letzte Glied der Summe:

für n Jahre $(e_n - a_n)q^{-n} + R_n q^{-n}$,

für n+1 Jahre $(e_{n+1} - a_{n+1})q^{-n-1} + R_{n+1}q^{-n-1}$,

für n-1 Jahre $(e_{n-1} - a_{n-1})q^{-n+1} + R_{n-1}q^{-n+1}$.

Diese Werte werden in den Maximumbedingungen für C_n berücksichtigt:

$$C_n - C_{n-1} > 0$$

$$\sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j)q^{-j} + R_n q^{-n} - \sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} - R_{n-1}q^{-n+1} > 0$$

Aus der ersten Summe wird das Glied für das Nutzungsjahr n herausgelöst:

$$\sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} + (e_n - a_n)q^{-n} + R_n q^{-n} - \sum_{j=o}^{n-1} (e_j - a_j)q^{-j} - R_{n-1}q^{-n+1} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf. Es bleibt als Rest bestehen:

$$(e_n - a_n)q^{-n} + R_n q^{-n} - R_{n-1}q^{-n+1} > 0$$

Daraus ergibt sich als erste Bedingung für die optimale Nutzungsdauer von n Jahren:

$$\boxed{e_n > a_n + iR_{n-1} + (R_{n-1} - R_n)} \qquad (70)$$

In der zweiten Ungleichung vollzieht sich ein ähnlicher Prozeß:

$$C_n - C_{n+1} > 0$$

$$\sum_{j=o}^{n} (e_j - a_j)q^{-j} + R_n q^{-n} - \sum_{j=o}^{n+1} (e_j - a_j)q^{-j} - R_{n+1}q^{-n-1} > 0$$

Das letzte Glied der zweiten Summe wird für sich gestellt:

$$\sum_{j=o}^{n}(e_j-a_j)q^{-j}+R_nq^{-n}-\sum_{j=o}^{n}(e_j-a_j)q^{-j}-(e_{n+1}-a_{n+1})q^{-n-1}-R_{n+1}q^{-n-1}>0$$

Die beiden Summen heben sich auf und die Ungleichung verkürzt sich zu der Form:

$$-e_{n+1}q^{-n-1}+a_{n+1}q^{-n-1}+R_nq^{-n}-R_{n+1}q^{-n-1}>0$$

Die zweite Bedingung für die optimale Nutzungsdauer von n Jahren lautet:

$$e_{n+1} < a_{n+1} + R_n i + (R_n - R_{n+1}) \qquad (71)$$

Der größte Kapitalwert eines Objektes wird bei der Nutzungsdauer n erreicht, wenn zu diesem Zeitpunkt die Einnahmen zum letzten Mal größer sind als die Summe aus Ausgaben plus Restwertzinsen plus Restwertminderung. Diese Bedingung stimmt mit dem Ergebnis überein, das E. SCHNEIDER erhält[1].

Die Reaktion der optimalen Nutzungsdauer auf Fehler in den Eingangsgrößen wird später im Zusammenhang mit den Ersatzmodellen untersucht, denn diese haben die Aufgabe, eine optimale Nutzungszeit unter Berücksichtigung der zukünftigen Ersatzobjekte zu bestimmen. Die Abweichungen des Kapitalwertes auf Grund von Eingangsfehlern lassen sich nach der im dritten Kapitel, Abschnitt I.A. 3-4, beschriebenen Weise ermitteln.

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.81.

B. Die Annuitätsmethode

1. Modellbeschreibung

Das Modell der Annuitätsmethode vergleicht die durchschnittlichen Einnahmen oder Erträge einer Investition mit ihren durchschnittlichen Ausgaben oder Kosten[1]. Die Differenz der durchschnittlichen Einnahmen und Ausgaben bildet den durchschnittlichen Gewinn. Die Folge der durchschnittlichen Einnahmen ist ebenso wie die Folge der durchschnittlichen Ausgaben der ursprünglichen Folge äquivalent. Das bedeutet, sie besitzt den gleichen Kapitalwert, den gleichen Diskontfaktor und die gleiche Länge wie die ursprüngliche Zahlungsfolge. Lediglich die Elemente, die in der ursprünglichen Folge gegebenenfalls unterschiedlich groß waren, sind in uniforme Durchschnittswerte transformiert worden. Die Berechnung der uniformen Elemente der äquivalenten Folge wird mit Hilfe des Wiedergewinnungsfaktors[2] durchgeführt:

$$\bar{a} = (a_o + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + \ldots + a_n q^{-n}) \frac{iq^n}{q^n - 1}$$

Der durchschnittliche Gewinn besteht aus dem Produkt von Kapitalwert der Investition multipliziert mit dem Wiedergewinnungsfaktor.

$$\boxed{\bar{d} = C \frac{iq^n}{q^n - 1}} \qquad (72)$$

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O.S.25ff.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie..., a.a.O. S.52ff.
Brandt, H.: Investitionspolitik..., a.a.O. S.77ff.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, Berlin-Köln-Frankfurt/Main 1964, S.18ff.
Investitionsrechnung (ohne Verfasser) in: Kostenrechnungspraxis, Wiesbaden 1964, Nr. 3, S.138ff.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.36ff.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O.S.25.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in Theorie..., a.a.O. S.53.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, Tübingen 1964, S.12.

Die Auswahl der geeignetsten Investition aus einer Gruppe von Alternativen wird nach dem größten durchschnittlichen Gewinn vorgenommen. Analog zur Definition der Vorteilhaftigkeit im Modell der Kapitalwertmethode heißt auch in diesem Modell eine Investition vorteilhaft, wenn der durchschnittliche Gewinn positiv ist.

Die approximative Annuitätsmethode benutzt das gleiche Modell, nur berücksichtigt sie anstatt der Zinseszinsen einfache Zinsen[1]. Dieses Modell enthält dadurch gegenüber den Folgen der Einnahmen und Ausgaben einen gewissen Verfahrensfehler.

2. Modellanalyse

Die Annuität, der durchschnittliche Betrag des Gewinnes, wird über den Kapitalwert berechnet. Die uniforme äquivalente Reihe besteht aus der gleichmäßigen Verteilung des Kapitalwertes über den gleichen Zeitraum, über den sich die ursprüngliche Reihe erstreckte. Besteht die Folge aus Einzahlungen und Auszahlungen, so existiert auch im Zeitpunkt null ein Betrag d_o, der in den meisten Fällen aus der Zahlung der Anschaffungsausgabe besteht und daher negativ ist.

Löst man in der Formel für den durchschnittlichen Gewinn,

$$\bar{d} = \frac{iq^n}{q^n - 1} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} \qquad (73)$$

den Wiedergewinnfaktor in seine Summanden auf, so erhält man:

$$\bar{d} = \frac{d_o + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + d_3 q^{-3} + \ldots + d_n q^{-n}}{q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + \ldots + q^{-n}}$$

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.28ff. Lohmann, M.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 4. neubearb. Aufl. Tübingen 1964, S.164. Investitionsrechnung (ohne Verfasser) in: Kostenrechnungspraxis, a.a.O. S.139.

Der durchschnittliche Gewinn stellt in diesem Falle nicht das gewogene arithmetische Mittel dar, mit dem sonst häufig ein Durchschnitt definiert wird. Das Gewicht des ersten Summanden im Zähler ist nicht im Nenner berücksichtigt worden. Die Annuitäten sind nicht über die gleiche Anzahl von Zahlungszeitpunkten verteilt worden, wie Ein- bzw. Auszahlungsvorgänge stattfanden, sondern auf einen Zeitpunkt weniger.

Das gewogene arithmetische Mittel aus den Werten des Zählers beträgt[1]:

$$\bar{d}_m = \frac{d_o + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + d_3 q^{-3} + \ldots + d_n q^{-n}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + \ldots + q^{-n}}$$

Die Diskontfaktoren stellen die Gewichte dar. Zieht man den Nenner zu einer Summe[2] zusammen, so verwandelt sich $\bar{d}_m$ in:

$$\bar{d}_m = \frac{iq^n}{q^{n+1} - 1} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} \qquad (74)$$

Das gewogene arithmetische Mittel der diskontierten Gewinne $\bar{d}_m$ besitzt einen etwas geringeren Wert, als der durchschnittliche Gewinn $\bar{d}$, der mit Hilfe des Kapitalwiedergewinnungsfaktors ermittelt wird.

Auch für eine unendlich lange Betrachtungsdauer zeigt sich ein Unterschied zwischen $\bar{d}_\infty$ und $\bar{d}_{m\infty}$. Die ewige Rente aus

---

[1] Vgl. Wagenführ, R.: Statistik leicht gemacht, a.a.O. S.63. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung, Wien und München 1961, S.443.

[2] Die Summe $1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-n}$ läßt sich zusammenziehen zu: $\frac{1 - q^{-n-1}}{1 - q^{-1}}$. Zähler und Nenner werden mit q^{n+1} multipliziert und ergeben $\frac{q^{n+1} - 1}{(q-1)\, q^n}$. Dieser Ausdruck wird für die Summe im Nenner des Bruches eingesetzt.

dem Kapitalwert C für den Wiedergewinnungsfaktor beträgt $\bar{d} = iC$, die ewige Rente[1] für die Summe der Gewichte $\bar{d}_{m\infty} = \frac{iC}{q}$.

Wie E. SCHNEIDER sagt[2], entspricht die Annuitätsmethode dem Denken der Praxis, weil sie mit durchschnittlichen Größen arbeitet. Der Ansatz gestaltet sich besonders einfach, wenn nur Durchschnittsgrößen in die Rechnung eingehen; dann braucht kein Kapitalwert gebildet zu werden, sondern die durchschnittlichen Einnahmen und Ausgaben werden nur voneinander subtrahiert und ergeben den durchschnittlichen Gewinn. Ob für eine Investition solche Durchschnittswerte ohne Rechnung ermittelt werden können, sei dahingestellt.

Für gemischte Werte aus durchschnittlichen Größen und zeitabhängigen Einzelgrößen empfiehlt es sich gegebenenfalls, die beiden Komponenten zu trennen und für die Einzelwerte den Durchschnitt zu berechnen. Die durchschnittlichen Größen brauchen nur noch addiert zu werden.

Die betrachtete Investition muß sachlich und zeitlich isolierbar sein. Die Rechnung kann sich aus Größen einer Einzelanlage, einer Anlagengruppe oder eines ganzen Betriebsteils zusammensetzen.

3. Die Empfindlichkeit des Modells der Annuitätsmethode auf Eingangsfehler

a. Die Auswirkung von Zinsfehlern

Sowohl zur Bildung des Kapitalwertes als auch zu seiner gleichmäßigen Verteilung als uniforme Reihe werden Zinses-

---

[1] Der Faktor, der aus dem reziproken Wert der Summe der Gewichte besteht, lautet: $\frac{i \cdot q^n}{q^{n+1} - 1} = \frac{i \cdot q^{-1}}{1 - \frac{1}{q^{n+1}}}$. Für ein sehr großes n geht $\frac{1}{q^{n+1}}$ gegen null, der Faktor nähert sich dem Grenzwert $\frac{i}{q}$.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.26.

zinsfunktionen herangezogen, daher besteht ein besonderes Interesse, die Wirkung von Zinsabweichungen festzustellen. Zu diesem Zweck wird die Bestimmungsgleichung des durchschnittlichen Gewinns nach q oder i differenziert und mit der Zinsabweichung multipliziert. (Es besteht kein Unterschied darin, ob nach i oder nach $1+i$ differenziert wird, da der Differentialquotient $d(1+i)/di$ den Wert 1 ergibt).

$$\frac{d\bar{d}}{di} = \frac{d\bar{d}}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{i}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j}\right)$$

$$\frac{d\bar{d}}{di} = \frac{1-q^{-n}-(q-1)nq^{-n-1}}{(1-q^{-n})^2} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + \frac{q-1}{1-q^{-n}}\left(\sum_{j=o}^{n} -jd_j q^{-j-1}\right)$$

Das Produkt $\frac{d\bar{d}}{di}$ mal Zinsabweichung f_i ergibt den Ausdruck für die Abweichung der durchschnittlichen Gewinne $f_{\bar{d}i}$[1].

(75)

$$f_{\bar{d}i} = f_i\left(\left(1 + \frac{1}{q^n-1} - \frac{niq^{n-1}}{(q^n-1)^2}\right) \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} - \frac{iq^n}{q^n-1} \sum_{j=o}^{n} jd_j q^{-j-1}\right)$$

Aus der Fehlergleichung geht hervor, daß zwei Komponenten sich entgegenwirken; von der ersten Komponente wird die zweite abgezogen.

Für die Gruppe von Investitionen, die aus einer Anschaffungsausgabe A_o und einer Folge von n Gewinnen bestehen und deren Gewinne sich als Funktion des ersten Gewinns und der Zeit beschreiben lassen, ergibt sich eine eigene Form des Fehlerausdrucks:

$$d_j = d_1\, h(j)$$

(76)

$$f_{\bar{d}i} = f_i\left(\left(1 + \frac{1}{q^n-1} - \frac{niq^{n-1}}{(q^n-1)^2}\right)(-A_o + d_1 \sum_{j=1}^{n} h(j)q^{-j}) - \frac{iq^n}{(q^n-1)}\, d_1 \sum_{j=o}^{n} jh(j)q^{-j-1}\right)$$

[1] Der erste Bruch wird mit q^{2n} erweitert sowie im Zähler q^n+1 addiert und gleichzeitig subtrahiert.

Die Auswahl von vier verschiedenen Gewinnverläufen kann für eine große Anzahl von betrieblichen Investitionen als gute Annäherung gelten, wie bereits bei der Fehlerrechnung für die Kapitalwertmethode ausgeführt wurde. Der Fehler wird dann aufgelöst in zwei Summanden. Der erste Summand besteht aus dem Produkt Kapitalwert multipliziert mit dem Faktor $S_a \cdot f_i$.

$$S_a = \left(1 + \frac{1}{q^n - 1} - \frac{n i q^{n-1}}{(q^n-1)^2} \right)$$

Der zweite Summand besteht aus dem Produkt f_i mal Wiedergewinnungsfaktor multipliziert mit dem Fehlerfaktor S' . Die Verläufe für S' als Funktion der Zeit, des Gewinnverlaufs und des Diskontfaktors sind in der Untersuchung über den Kapitalwert ermittelt und aufgezeichnet worden, vgl. S_k , S_l , S_d und S_p .

Die Verläufe der beiden genannten Summanden können nicht für eine Anzahl repräsentativer Fälle gleichzeitig gezeigt werden, da nun auch der Anschaffungswert A_o in den Fehler eingeht und ihn beeinflußt.

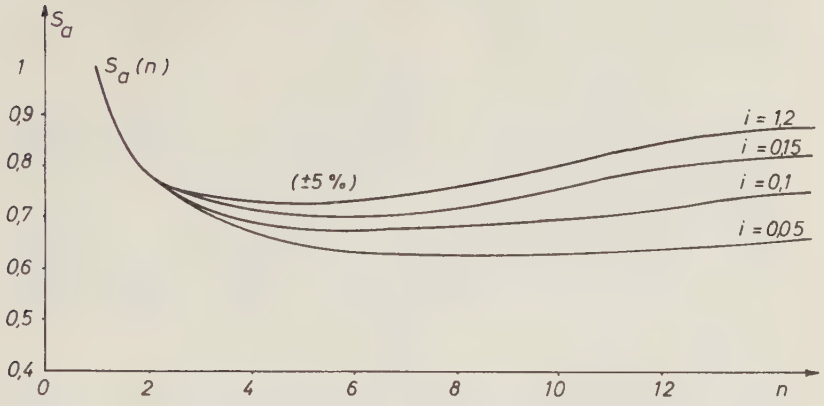
Der Faktor S_a soll für verschiedene Nutzungsdauer n und alternative Zinssätze i in Tabellenform aufgezeichnet werden:

Fehlerfaktoren für Durchschnittsgewinne

Zinsfuß i	Fehlerfaktor S_a für die Nutzungsdauer				
	1	4	7	10	15
0,05	1	0,66	0,63	0,63	0,65
0,10	1	0,68	0,68	0,70	0,78
0,15	1	0,71	0,72	0,76	0,83
0,20	1	0,74	0,76	0,81	0,88

Tabelle 8

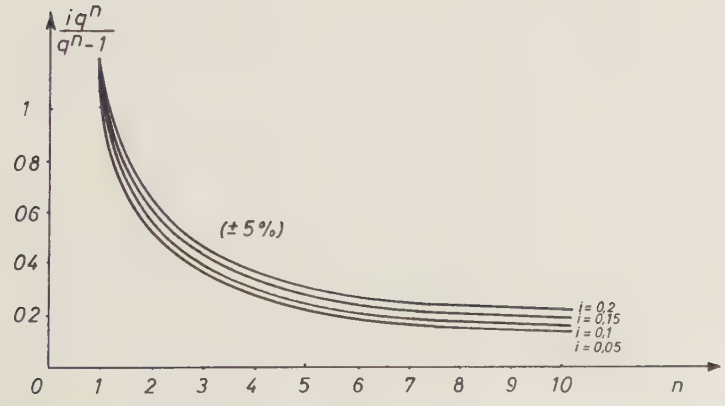
Die zeitlichen Verläufe des Fehlerfaktors S_a



Figur 25

Figur 25 zeigt den Verlauf dieses Faktors S_a graphisch; die Länge der Ordinate wurde etwas gekürzt, um die einzelnen Verläufe deutlicher hervorzuheben.

Die zeitlichen Verläufe des Wiedergewinnungsfaktors



Figur 26

Die Verläufe der Fehlerfaktoren S_k , S_1 , S_d und S_p wurden im 3. Kapitel, Abschnitt I.B gezeigt, zur besseren Übersicht soll der Wiedergewinnungsfaktor auch graphisch abgebildet werden (Figur 26). Seine Werte in Tabellenform können in der einschlägigen Literatur nachgesehen werden[1].

Die Funktionen der Faktorverläufe lassen den Schluß zu, daß der Fehler durch den Zins sehr gering ist. Wird der Zinsfehler des durchschnittlichen Gewinnes als verkürzte Funktion ausgedrückt, so lautet er:

$$f_{\bar{d}i} = f_i \left(S_a \cdot C - \frac{iq^n d_1}{q^n - 1} S' \right)$$

Der Faktor S_a bewegt sich zwischen 0,6 und 1, wenn man den wichtigsten Zeitabschnitt für die Nutzungsdauer, 1 - 10 Jahre, betrachtet. Der Kapitalwert C kann als positiv angenommen werden. Der Kapitalwiedergewinnungsfaktor verläuft zwischen 1,2 und 0,12 und der Fehlerfaktor S' zwischen 38 und 4. f_i beträgt nur wenige Prozente. Der zweite Summand vermindert den Fehler sehr, denn im Falle eines großen Kapitalwertes muß auch d_1 groß sein, die Differenz hält sich daher stets in Grenzen.

Besteht die Investition aus einer einzigen Anfangsausgabe und einer unendlich langen Folge von konstanten Gewinnen, so beträgt der durchschnittliche Gewinn:

$$\bar{d}_\infty = \frac{iq^n}{q^n - 1} \left(-A_o + d \cdot \sum_{j=1}^{n} q^{-j}\right) \rightarrow (n \rightarrow \infty) = i\left(-A_o + \frac{d}{i}\right)$$

$$\boxed{\bar{d}_\infty = d - iA_o} \qquad (77)$$

Der Zinsfehler dieser Investitionen läßt sich besonders einfach ermitteln:

---

[1] Vgl. u.a. Brandt, H.: Investitionspolitik, a.a.O. S.223.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.151ff.
Kosiol, E.: Finanzmathematik, Wiesbaden 1959, S.207.

$$f_{\bar{d}i\,\infty} = \frac{d\bar{d}_{\infty}}{di} f_i = -A_o f_i \qquad (78)$$

Die Abweichung des durchschnittlichen Gewinnes beträgt so viel, wie die Zinsabweichung mal dem Anschaffungswert ausmacht.

Für eine Investition, die aus einem Anschaffungswert A_o und degressiv fallenden Gewinnen besteht, kann eine unendlich lange Lebensdauer angesetzt werden:

$$d_j = \frac{d_1}{p_d^{j-1}} \qquad (p_d = \text{Degressionsrate})$$

$$\bar{d}_d = \frac{iq^n}{q^n - 1} \left(-A_o + d_1 \sum_{j=1}^{n} p_d^{-j+1} q^{-j}\right)$$

Zieht man den Faktor $p_d^{-2} q^{-1}$ vor die Summe, so kann man statt der Summe eine Summenformel einsetzen:

$$\bar{d}_d = \frac{iq^n}{q^n - 1} \left(-A_o + \frac{d_1}{qp_d^2} \cdot \frac{1 - (qp_d)^{-n}}{1 - (qp_d)^{-1}}\right)$$

Geht n gegen unendlich, so nähert sich dieser Ausdruck folgender Form:

$$\bar{d}_{d\,\infty} = i \left(-A_o + \frac{d_1}{p_d(p_d q - 1)}\right) \qquad (79)$$

Der Zinsfehler des durchschnittlichen Gewinns beträgt $f_i \frac{d\bar{d}_{d\,\infty}}{di}$

$$f_{\bar{d}_{d\,\infty} i} = f_i \left(\frac{d(p_d q - 1) - p_d di}{(p_d q - 1)^2 p_d} - A_o\right)$$

$$f_{\bar{d}_{d\,\infty i}} = f_i \left(\frac{dp_d - d + dp_d i - dp_d i}{(p_d q - 1)^2 p_d} - A_o \right)$$

$$\boxed{f_{\bar{d}_{d\,\infty i}} = f_i \left(\frac{p_d - 1}{(p_d q - 1)^2 p_d} d - A_o \right)} \qquad (80)$$

Der Zinsfehler des durchschnittlichen Gewinnes bei einer unendlich langen degressiv fallenden Gewinnreihe ist noch geringer als die Zinsabweichung multipliziert mit dem Anschaffungswert.

b. Die Auswirkung von Gewinnfehlern

Zur Ermittlung der Abweichung des durchschnittlichen Gewinnes auf Grund von Gewinnfehlern in den Eingangsgrößen wird die Funktion der durchschnittlichen Gewinne nach den Einzelgewinnen differenziert.

$$\frac{d\bar{d}}{dd_j} = \frac{iq^n}{q^n - 1} (q^{-j})$$

Der Gesamtfehler aus den Gewinnabweichungen ergibt sich aus der Summe der Produkte Einzelfehler eines Gewinnes multipliziert mit der ersten Ableitung des Gesamtgewinnes nach dem Einzelgewinn.

$$f_{\bar{d}d} = \frac{iq^n}{q^n - 1} (f_{do} q^{-o} + f_{d1} q^{-1} + f_{d2} q^{-2} + f_{d3} q^{-3} + \ldots + f_{dn} q^{-n})$$

$$\boxed{f_{\bar{d}d} = \frac{iq^n}{q^n - 1} \sum_{j=o}^{n} f_{dj} q^{-j}} \qquad (81)$$

Für die absoluten Einzelfehler können wieder die Produkte aus relativem Einzelfehler multipliziert mit den zugehörigen Ge-

winnen eingesetzt werden.

$$f_{\bar{d}d} = \frac{iq^n}{q^n - 1} \sum_{j=0}^{n} f_{rj} d_j q^{-j} \qquad (82)$$

Der relative Fehler des durchschnittlichen Gewinns $f_{r\bar{d}d}$ besteht aus dem Verhältnis absoluter Fehler zu durchschnittlichem Gewinn. Er bildet das gewogene arithmetische Mittel der einzelnen relativen Gewinnfehler.

$$f_{r\bar{d}d} = \frac{\sum_{j=0}^{n} f_{rj} d_j q^{-j}}{\sum_{j=0}^{n} d_j q^{-j}} \qquad (83)$$

Der relative Fehler des durchschnittlichen Gewinns liegt zwischen dem größten und dem kleinsten relativen Einzelfehler.

$$f_{rj\ min} < f_{r\bar{d}d} < f_{rj\ max}$$

Besitzen alle Einzelgewinne den gleichen relativen Fehler, so ist dieser gleich dem relativen Fehler des durchschnittlichen Gewinns.

Da mindestens ein jährlicher Gewinn mit negativem Vorzeichen auftritt, die Anschaffungsausgabe, besitzt der Kapitalwert den Charakter einer Differenz. Der Nenner des Bruches ist manchmal klein genug, daß der relative Gesamtfehler sehr groß wird. Die Einzelgewinne stellen Differenzen dar, für ihren Fehler gelten die Darstellungen, die im Zusammenhang mit der Kapitalwertmethode entwickelt wurden (Vgl. Abschnitt I.A.5).

Mit geringen Gewinnbeträgen erhöht sich die Gefahr eines großen Fehlers.

C. Der Verfahrensvergleich

1. Modellbeschreibung

Das Modell des Verfahrensvergleiches ähnelt in seinem Charakter stark der Annuitätsmethode. Gleichzeitig stellt es einen Vorläufer der Ersatzmodelle dar, denn es vergleicht in vielen Fällen eine im Betrieb befindliche Anlage mit einem Investitionsobjekt, das als Ersatz in Frage kommt. Der Verfahrensvergleich existiert in zwei Varianten, dem Kostenvergleich und dem Gewinnvergleich. Der Kostenvergleich[1] stellt die jährlichen Kosten der beiden zu vergleichenden Objekte für eine bestimmte Beschäftigung einander gegenüber. Das kostengünstigere Objekt wird gewählt.

Als zweites Kriterium werden die Anschaffungsausgaben der betrachteten Objekte in den Vergleich einbezogen.

---

[1] Vgl. u.a. Brandt, H.: Investitionspolitik....., a.a.O. S.30 und S.50.
Sutter, W.: Wirtschaftlichkeitsberechnungen als Planungsinstrument, Methoden und Untersuchungen für verfahrensmäßige und industrielle Planung mit Beispielen und Schaubildern, Herne/Berlin 1964.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.20ff.
Rummel, K.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.75.
Swoboda, P.: Die betriebliche Anpassung..... a.a.O. S.142
Brokmeier, K.-H.; Lang, W.: Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen beim induktiven Schmelzen von Gußeisen und Stahl, in: Giesserei, Zeitschrift für das gesamte Giessereiwesen, 45. Jg. 1958, H.17, S.465ff.
Backhaus, K.-E., Mommertz, K.H.: Betriebswirtschaftlicher Vergleich zwischen Diesel- und Akkumulatorlokomotive im Grubenbereich unter Tage, in: Glückauf, 95. Jg. 1959, H.24 S.1518ff.
Witthoff, J.: Die Wirtschaftlichkeit der Zerspanung, in: Maschinenmarkt, Werkzeugmaschinen-Praxis (2. Forschungs- und Konstruktionskolloquium Werkzeugmaschinen) 1955, S.19ff.

Die Gewinnvergleichsrechnung[1] stützt sich außer auf Kostenunterschiede auch noch auf die Ertragsdifferenzen zwischen den zu vergleichenden Objekten.

Als Elemente für den Verfahrensvergleich können sowohl Gesamtkosten[2] bzw. -erträge der betrachteten Periode als auch Stückkosten[3] verwendet werden.

---

[1] Vgl. auch Brandt, H.: Investitionspolitik, a.a.O. S.55ff.
Investitionsrechnung (ohne Verfasser) in: Kostenrechnungspraxis, Wiesbaden 1964, S.93.
Passmann, B.: Die Wirtschaftlichkeit der Mechanisierung und Elektrifizierung im französischen Steinkohlenbergbau, in: Glückauf 92. Jg. 1956, H. 45/46, S.1352ff.
Müller, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung auf Eisenhüttenwerken, (Bericht Nr. 277 des Ausschusses für Betriebswirtschaft des Vereins deutscher Eisenhüttenleute) in: Stahl und Eisen 76 (1956) Nr. 22, S. 1486ff.

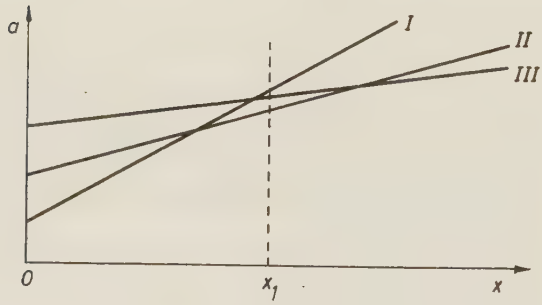
[2] Vgl. u.a. Brandt, H.: Investitionspolitik, a.a.O. S.31f.
Zeidler, F.: Wesen und Wirtschaft des Betriebes, Düsseldorf 1962, S.169ff.
Gutenberg, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre (Die Wirtschaftswissenschaften) Wiesbaden 1958, S.73f.
Dzieyk, B.: Wirtschaftlichkeit von Vorrichtungen in Abhängigkeit von der Fertigungsstückzahl, in: Werkstatt und Betrieb 89 Jg. 1956, H.3, S.131ff.

[3] Vgl. u.a. Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. I Die Produktion, 7. Auflage, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1962, S.293.
Sutter, W.: Wirtschaftlichkeitsberechnungen ...., a.a.O. S.172.
Schaub, W.: Wirtschaftlichkeitsrechnungen, Refa-Nachrichten 1955, S.71-74.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.84ff.

2. Modellanalyse

Der Verfahrensvergleich wird hauptsächlich zur Lösung von Kapazitätsproblemen und Rationalisierungsfragen herangezogen. Seine Elemente, die Kosten- und Ertragsgrößen werden nicht in ihren zeitlichen Verläufen, sondern als Funktion der Beschäftigung gezeigt[1].

Kostenkurven als Funktionen von der Beschäftigung



Figur 27

Aus der Schar der Kostenkurven, vgl. Figur 27 , wählt der Verfahrensvergleich durch einen vertikalen Schnitt am Punkt x_1 der erwarteten Beschäftigung die auf dieser Schnittgeraden minimale Kostenfunktion (II) aus.

Implizit gilt die Voraussetzung, daß sich die Beschäftigung nicht ändert und daß die Kosten zeitlich konstant bleiben. Die Kosten bauen sich aus gemischten Werten von effektiven Kosten und buchhalterischen Schätzungen wie Abschreibung und Zinsen auf. Die Größen werden sachlich und zeitlich isoliert angesetzt.

---

[1] Vgl. u.a. Gutenberg, E.: Einführung in ..., a.a.O. S.73.
Gutenberg, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Die Produktion, a.a.O. S.318.
Angermann, A.: Entscheidungsmodelle, Frankfurt/Main 1963, S.119ff.
Dzieyk, B.: Wirtschaftlichkeit von Vorrichtungen in ..., a.a.O. S.131ff.

Bei der Verwendung des Verfahrensvergleiches als Ersatzmodell berücksichtigt es keinen Restwert der alten Anlage; die Anlage wird daher im Laufe ihrer geschätzten Nutzungsdauer buchhaltungsmäßig voll abgeschrieben. K. RUMMEL schätzt aus der Kostenersparnis die Abschreibungsdauer[1].

3. Fehlerbetrachtung

Das Modell enthält durch die vereinfachenden Annahmen über Kostenkonstanz, Abschreibung und Zinsverlauf einen Verfahrensfehler. Der Verfahrensfehler hängt in seiner Höhe auch von der Methode ab, mit der die Eingangswerte ermittelt wurden. Er überdeckt kleine Zinsfehler vollständig. Abweichungen der Kosten oder Erträge von den geschätzten Werten pflanzen sich in gleicher Höhe in die Gesamtkosten oder Gesamterträge fort, da diese durch Addition entstehen.

Die Schätzung der Nutzungsdauer kann Fehler enthalten, die nur in ganz bestimmten Quanten auftreten, da die Nutzungsdauerabweichung nur in ganzen Perioden gemessen wird. Der Fehler durch Nutzungsdauerabweichung tritt in den Zinsen und in den als konstant angenommenen jährlichen Abschreibungsbeträgen auf. Der Zinsfehler kann vernachlässigt werden.

Der Fehler der Abschreibungsbeträge bei linearer Abschreibung erreicht je nach der Länge der Nutzungsdauer festgelegte Bruchteile des Anschaffungswertes. Der relative Fehler ergibt sich aus dem Verhältnis der Abschreibungsänderung zu der wahren Abschreibung bei Verschiebung der Nutzungsdauer um ein Jahr in der angezeigten Richtung.

Nutzungsdauer	1	2	3	4	5	6	7
Fehler in % v. A_o, für eine Änderung der Nutzungsdauer von 1 Jahr	50	16,7	8,3	5	3,3	2,4	
Relativer Fehler (%) für positive Änderung der Nutzungsd. ⟶	50	33	25	20	16,7	14,3	
Rel.Fehler(%) für negative Änderung der Nutzungsdauer ⟵	100	50	33	25	20	16,7	

[1] Vgl. Rummel, K.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.77.

Mit der Richtungsänderung wechselt für eine Änderung zwischen zwei Abschreibungswerten die Bezugsgröße.

Eine fundierte Fehlerabschätzung verursacht bei dem Verfahrensvergleich etwa den gleichen zeitlichen Aufwand wie die Durchführung der Annuitätsmethode mit genaueren Werten und die dazugehörige Fehleranalyse.

D. Die klassischen Ersatzmodelle

1. Der Ersatz von Anlagen, deren Leistungsfähigkeit mit der Zeit nachläßt

a. Die Beschreibung einiger Modelle

(1) Die Theorie des maximalen Goodwill

Das zeitliche Herauslösen einer einzelnen Investition aus der Kette aller Nachfolger für die gesamte betriebliche Lebensdauer zwingt zu der Untersuchung der zeitlichen Interdependenzen. Welchen Einfluß besitzen die Nachfolger auf die gegenwärtig betrachtete Investition? Die Ersatzmodelle zeigen die Ansätze zur Lösung einer solchen Frage und entwickeln die Kriterien für eine Ersatzstrategie[1]. Man unterscheidet Ersatzmo-

[1] Über das Ersatzproblem ist eine umfangreiche Literatur vorhanden, vgl. besonders:
Taylor, J.S.: A Statistical Theory of Depreciation, in: The Journal of the American Statistical Association, Vol. 18)1923) S.1010ff.
Hotelling, H.: A General Mathematical Theory of Depreciation, in: The Journal of the American Statistical Association, Vol. 20 (1925), S.340ff.
Roos, C.F.: A Mathematical Theory of Depreciation and Replacement, in: American Journal of Mathematics, 1928, S.147ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.75ff.
Schneider, E.: Die wirtschaftliche Lebensdauer industrieller Anlagen, a.a.O. S.97ff.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei...,a.a.O. S.60ff.
Holler, A.: Die Ermittlung der ...., a.a.O. S.15ff.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.36ff.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.37ff.
Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung, Wien und München 1961, S.435ff.
Lutz, F. und V.: The Theory of....., a.a.O. S.106ff.
Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, New York-Toronto-London 1949.
Terborgh, G.: Business Investment Policy, Washington 1962.
Meij, I.L.: Depreciation and Replacement Policy, Amsterdam 1961.
Smith, V.L.: Investment and Production, Cambridge Mass. 1961.
Buffa, E.S.: Models for Production and Operations Management, New York-London 1963, S.369ff.
Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von ....., a.a.O. S.133ff.

delle für Investitionsobjekte mit abnehmender Leistungsfähigkeit, wie Maschinen, und Entscheidungsmodelle für Investitionsobjekte, die als eine Gruppe plötzlich versagender Einheiten auftreten, wie zum Beispiel Elektronenröhren[1].

Für die Maximierung des Kapitalwertes von Investitionsketten, die aus Gliedern mit abnehmender Leistungsfähigkeit bestehen, kann ein Goodwillmodell als charakteristisches Element einer ganzen Gruppe von Ersatzmodellen beschrieben werden.

Die unendlich lange Kette soll aus identischen Gliedern bestehen, die alle die gleiche Nutzungsdauer n besitzen. Der Kapitalwert einer einzelnen Investition sei C, der Kapitalwert der unendlich langen Kette beträgt dann bei stetiger Verzinsung[2]:

$$C_\infty = C + C \cdot \exp^{-jn} + C \cdot \exp^{-2jn} + C \cdot \exp^{-3jn} + \ldots$$

$$\boxed{C_\infty = C \frac{1}{1 - \exp^{-jn}}} \qquad (84)$$

Der Kapitalwert einer unendlich langen Reihe aus identischen Gliedern beträgt bei Diskontierung mit Zinseszinsen[3]:

$$C_\infty = C \left(1 + q^{-n} + q^{-2n} + q^{-3n} + \ldots\ldots\right)$$

$$\boxed{C_\infty = C \frac{1}{1 - q^{-n}}} \qquad (85)$$

Welche Nutzungsdauer der einzelnen Kettenelemente soll gewählt werden, damit der Goodwill C_∞ sein Maximum erreicht?

---

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.435.
Lutz, F. und V.: The Theory of Investment of the Firm, a.a.O. S.101.

[2] Vgl. Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.42.
Lutz, F. und V.: The Theory of Investment of the Firm, a.a.O. S.107.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.56.

[3] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.442.

Ein solches Maximum existiert, wenn die Gewinne eines Kettengliedes nach dem Durchlaufen von höchstens einem Maximum monoton fallen. Bei identischen Kettengliedern besitzt jedes die gleiche optimale Nutzungsdauer[1], wenn die Kette unendlich lang ist.

Das Kriterium für die gewinnmaximale Nutzungsdauer ist für Momentanverzinsung bereits mehrfach beschrieben worden, so daß diese mathematische Entwicklung nicht gezeigt zu werden braucht[2]. Die Nutzungsdauer n besitzt die optimale Länge, wenn der Rohgewinn der Periode $Q(n)$ gerade noch die Summe aus Restwertveränderung, Restwertverzinsung und Verzinsung des Kapitalwertes der nachfolgenden Anlagen deckt.

$$Q(n) = jR(n) - R'(n) + jC_{\infty n} \qquad (86)$$

Stellt man die Gleichung um, so erhält sie eine Form, die den Vergleich des Goodwillmodells mit anderen Modellen vereinfacht.

$$jC_{\infty n} = Q(n) - jR(n) + R'(n)$$

$jC_{\infty n}$ stellt den durchschnittlichen Periodengewinn - hier ist die Periode beliebig klein - der unendlich langen Kette dar. Die Nutzungsdauer ist optimal, wenn der zeitliche Grenzgewinn den Periodengewinn mit fallendem Verlauf schneidet.

Dieser Ausdruck läßt sich auch für den wirklichkeitsnäheren Tatbestand von jährlichen Gewinnen mit Berücksichtigung von

---

[1] Vgl. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.63.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.61.

[2] Vgl. Lutz, F. und V.: The Theory of Investment of the Firm, a.a.O. S.107.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.57.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.42.
Fetter, R.B., Goodman, T.P.: An Equipment-Investment Analog, in: Operations Research, Vol.5, Baltimore 1957, S.658.

Zinseszinsen und jährlicher Restwertminderung umformen. Da nun die Nutzungsdauer nur ganze Abrechnungsperioden umfassen soll, kann nicht der optimale Zeitpunkt durch eine Gleichung definiert werden, sondern muß durch zwei Ungleichungen festgelegt sein:

$$iC_{\infty n} < Q(n) - iR_{n-1} - (R_{n-1} - R_n)$$

$$iC_{\infty n} > Q(n+1) - iR_n - (R_n - R_{n+1})$$

An die Stelle des Bruttogewinnes $Q(n)$ tritt das aus der Kapitalwertmethode schon geläufige d_n.

$$\boxed{\begin{aligned} iC_{\infty n} &< d_n - iR_{n-1} - (R_{n-1} - R_n) \\ iC_{\infty n} &> d_{n+1} - iR_n - (R_n - R_{n+1}) \end{aligned}} \qquad (87)$$

Die optimale Nutzungsdauer eines Investitionsobjektes, das ein Glied einer unendlich langen Kette identischer Glieder ist, liegt zu dem Periodenpunkt vor, wenn der Gewinn der folgenden Periode zum ersten Mal geringer als der durchschnittliche Gewinn der Kette ausfällt[1]. Setzt man in die Optimumbedingung die Werte für den Kapitalwert C_∞ ein, so lautet sie:

(88)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{i}{1 - q^{-n}}\left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n} \right) &< d_n - iR_{n-1} - (R_{n-1} - R_n) \\ \frac{i}{1 - q^{-n}}\left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n} \right) &> d_{n+1} - iR_n - (R_n - R_{n+1}) \end{aligned}}$$

Der Anschaffungswert ist in d_o enthalten und tritt der Einfachheit halber nicht besonders in Erscheinung, alle Einnahmen und Ausgaben sind auf das Periodenende zusammengezogen,

[1] Der Beweis für diese Aussage wird im Anhang 4 gezeigt.

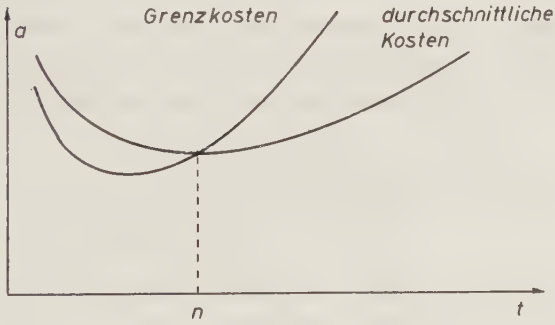
die Anschaffungsausgabe tritt zum Zeitpunkt null auf.

(2) Die Theorien der minimalen Kosten von SCHNEIDER, RIFAS, SASIENI-YASPAN-FRIEDMAN

Setzt man die Erträge als konstant voraus, so führt das Goodwillmodell bei Momentanverzinsung in das SCHNEIDERsche Ersatzmodell der Kostenminimierung[1] über. Das Barwertminimum der Kosten fällt mit dem Barwertmaximum des Goodwill zusammen. Es ist zu dem Zeitpunkt erreicht, an dem die zeitlichen Grenzkosten die Durchschnittskosten mit positiver Steigung schneiden, vgl. Figur 28 .

$$jA_{\infty n} = a(n) + jR(n) - R'(n)$$ [2]

$A_{\infty n}$ = Barwert der Kosten bei einer unendlich langen Kette identischer Investitionen der Lebensdauer n.



Figur 28

[1] Vgl. hierzu:
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.86.
Schneider, E.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer industrieller Anlagen, a.a.O. S.108.
Holler, A.: Die Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer von Anlagen, a.a.O. S.18.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.137ff.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.56f.
Fetter, R.B., Goodman, T.P.: An Equipment-Investment Analog, a.a.O. S.660.

[2] a(n) = Grenzkosten ohne Kapitalkosten.

Die Annahme konstanter Erträge führt bei Berechnung mit Zinseszinsen und bei jährlicher Kosten- und Ertragszurechnung zu den Ersatzmodellen von RIFAS[1] und M. SASIENI, A. YASPAN, L. FRIEDMAN[2]. G. TERBORGH nennt Modelle dieser Art die "Orthodox Engineering Formula"[3].

Im Modell von RIFAS werden wie im SCHNEIDERschen Ersatzmodell Durchschnittskosten minimiert. Die Kosten eines jeden Jahres werden auf den Jahresanfang zusammengezogen, dann beträgt der Barwert aller Kosten $A_{\infty n}$:

$$A_{\infty n} = \frac{1}{1 - q^{-n}} \left(A_o + \sum_{j=1}^{n} a_j q^{-j+1}\right)$$

Der Barwert der Kosten $A_{\infty n}$ wird für die Nutzungsdauer n dann minimiert, wenn die Kosten des Jahres n kleiner als $A_{\infty n-1}(1-q^{-1})$ und die Kosten des Jahres $n+1$ größer sind als $A_{\infty n}(1-q^{-1})$. Setzt man in diese Bedingung die Ausdrücke für die Durchschnittskosten ein, so erhält man die Kriterien dafür, daß n die optimale Nutzungsdauer darstellt:[4]

$$a_n < \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-n+1}} \left(A_o + \sum_{j=1}^{n-1} a_j q^{-j+1}\right)$$

$$a_{n+1} > \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-n}} \left(A_o + \sum_{j=1}^{n} a_j q^{-j+1}\right)$$

---

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.442ff.
Ackoff, R.L.: Progress in Operations Research, Vol. I., New York - London 1961, S.341.

[2] Vgl. Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung (deutsch von Künzi, H.P.) Würzburg 1962, S.110ff.

[3] Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.176.

[4] Den Gang der Rechnung zeigt RIFAS, vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.442ff.

Zieht man die Summen auseinander und setzt für den Faktor, der eine reziproke Summe darstellt, diese ein, so zeigt sich auch die Art des Durchschnitts, die hier minimiert wird.

$$a_n < \frac{(A_o+a_1) + a_2q^{-1} + a_3q^{-2} + a_4q^{-3} + \ldots + a_{n-1}q^{-n+2}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + \ldots + q^{-n+2}}$$

$$a_{n+1} > \frac{(A_o+a_1) + a_2q^{-1} + a_3q^{-2} + a_4q^{-3} + \ldots + a_nq^{-n+1}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + \ldots + q^{-n+1}} \qquad (89)$$

Die hier betrachteten Durchschnittskosten sind das gewogene arithmetische Mittel aller diskontierten Jahreskosten bis zum Ende des Vorjahres. Das Modell enthält in dieser Form keinen Restwert.

Der optimale Ersatzzeitpunkt bei SASIENI-YASPAN-FRIEDMAN unterliegt der Bedingung[1]:

$$\frac{1-q^{-n+1}}{1-q^{-1}} a_n - A_{n-1} < 0 < \frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}} a_{n+1} - A_n \qquad (90)$$

A_n = Barwert aller Kosten der Jahre 1 bis n .

Die Kosten sind auf den Jahresanfang zusammengezogen.

$$A_n = A_o + \sum_{j=1}^{n} a_j q^{-j+1}$$

Setzt man für A_n die entsprechende Summe ein und zerlegt die Ungleichung in zwei verschiedene Ungleichungen, in denen die Kosten des letzten Jahres a_n bzw. a_{n+1} auf der einen Seite allein stehen, so lauten die Bedingungen:

[1] Vgl. Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, a.a.O. S.114.

$$a_n < \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-n+1}} \left(A_o + \sum_{j=1}^{n-1} a_j q^{-j+1}\right)$$

$$a_{n+1} > \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-n}} \left(A_o + \sum_{j=1}^{n} a_j q^{-j+1}\right)$$

Diese Bedingung für die optimale Nutzungsdauer n ist identisch mit der Bedingung bei RIFAS.

Auch die Ablösung einer Kette durch eine nicht identische kann durchgeführt werden. RIFAS zeigt die Ablösung für konstante Erträge ohne Berücksichtigung eines Restwertes durch Kostenminimierung. Der Vorgang stellt eine Ablösung zweier unendlich langer Ketten aus jeweils identischen Gliedern dar. Der Barwert der Kosten der ablösenden Kette ist geringer als der Barwert der Kosten der abgelösten Kette. Wann kommt der optimale Zeitpunkt für die Ablösung? Der Barwert der kombinierten Kette aus den restlichen Gliedern der alten Kette bis zum Ablösungszeitpunkt und der unendlichen langen Folge identischer neuer Investitionen besitzt folgende Form[1], wenn nach m Jahren abgelöst wird:

$$A_{\infty m} = a_1 + a_2 q^{-1} + a_3 q^{-2} + \ldots + a_m q^{-m+1} + A'_{\infty n} q^{-m} \qquad (91)$$

Die Glieder der neuen Kette besitzen die optimale Nutzungsdauer n Jahre, ihr Barwert im Zeitpunkt m beträgt $A'_{\infty n}$. Der Barwert aller Kosten $A_{\infty m}$ besitzt für den Ablösungszeitpunkt seinen minimalen Wert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(1 - q^{-1})A_{\infty n} > a_m$$
$$(1 - q^{-1})A_{\infty n} < a_{m+1} \qquad (92)$$

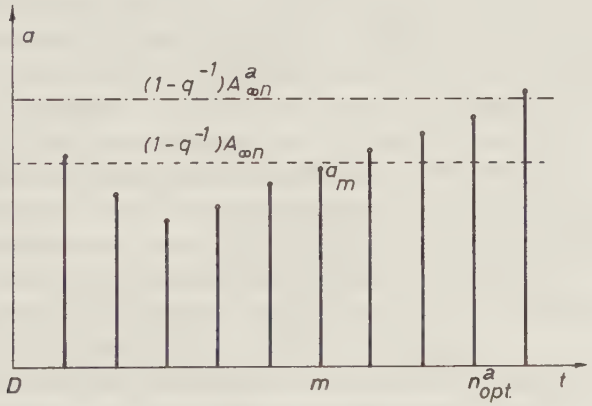
[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.447.

Für den Wert $(1-q^{-1})A_{\infty n}$ könnte man wieder den Bruch einsetzen, der zeigt, daß dieses Produkt das gewogene arithmetische Mittel aller diskontierten Kosten der n Nutzungsjahre der neuen Anlage ist, also die durchschnittlichen jährlichen Kosten der neuen Anlage darstellt.

Eine bestehende Anlage wird zu dem Zeitpunkt von einer Kette aus anderen unter sich identischen Gliedern abgelöst, an dem die Kosten des nächsten Jahres zum ersten Mal höher sind als die Durchschnittskosten der neuen Anlage.

Zu einer gleichen Aussage führen auch ähnliche Modelle anderer Autoren[1].

Der optimale Ersatzzeitpunkt bei Kettenablösung



Figur 29

[1] Vgl. Dean, J.: Capital Budgeting, New York 1951, S.95.
Jonas, H.: Investitionsrechnung, a.a.O. S.103.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.93f.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.137
Sieben, G.: Optimale Nutzungsdauer von Anlagegütern?, in: Kostenrechnungspraxis, Wiesbaden 1958, S.132.
Lohmann, M.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 4. neubearb. Aufl. 1964, S.168.
Borchard, K.-H.: Wirtschaftlichkeitsplanung, a.a.O. S.56ff.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, a.a.O. S.21f.

Figur *29* zeigt graphisch die Lage des optimalen Ablösungspunktes m . Vom Betrachtungszeitpunkt D an verursacht die alte Anlage bis zum Zeitpunkt m geringere jährliche Kosten a(t) als die durchschnittlichen jährlichen Kosten der neuen Anlage $A_{\infty n}(1-q^{-1})$ betragen. Besitzt die Kette der neuen Anlage gleiche durchschnittliche Jahreskosten wie die Kette der alten Anlagen $A^{a}_{\infty n}(1-q^{-1})$, so fällt der Ablösungszeitpunkt mit dem Ersatzzeitpunkt n^{a}_{opt} der Kette der alten Anlage zusammen.

(3) CAPLAN's Modell

B. CAPLAN erkannte, daß das Goodwillmodell in seiner ursprünglichen Form nur für identische Investitionsobjekte den optimalen Ersatzzeitpunkt bestimmt[1]. Er sucht den Ablösungszeitpunkt für eine bestehende Anlage in dem Fall, wenn eine andere bessere als Ersatzobjekt vorgesehen ist. Er nennt zwei Möglichkeiten, einen optimalen Ablösungszeitpunkt zu bestimmen[2]:

Entweder erweitert man die Methode von H. HOTELLING dadurch, daß man statt des Goodwills einer Kette identischer Glieder den Goodwill der Summe aus dem Kapitalwert der bestehenden Anlage und dem Barwert des Goodwills der neuen Anlage mit Hilfe des Differenzierens maximiert, oder man sucht das gleiche Ergebnis durch Ungleichungen zu erhalten.

B. CAPLAN wählt den zweiten Weg und formuliert folgenden Ansatz:

Eine vorzeitige Ablösung der bestehenden Anlage ist durchzuführen, wenn die Ungleichung erfüllt wird:

$$\left(C_t - \frac{C_{t+1}}{q}\right) + \left(R_t - \frac{R_{t+1}}{q}\right) > \frac{d_{t+1}}{q} \qquad (93)$$

C_t = maximaler Goodwill der neuen Anlage, wenn sie in t eingesetzt wird

C_{t+1} = maximaler Goodwill der neuen Anlage, wenn sie in t+1 eingesetzt wird.

[1] Vgl. Caplan, B.: The Premature Abandonment of Machinery, in: The Review of Economic Studies, Vol.7, 1939/40, S.113ff.

[2] Vgl. Caplan, B.: The Premature Abandonment...,a.a.O. S.117. Briel, H.v.: Die Ermittlung der...., a.a.O. S.77.

R_t und R_{t+1} sind die Restwerte der bestehenden Anlage zu dem entsprechenden Zeitpunkt. d_{t+1} stellt den Rohgewinn im Jahr $t+1$ dar. Die Ungleichung kann etwas umgeformt werden und sieht dann folgendermaßen aus:

$$d_{t+1} - iR_t - (R_t - R_{t+1}) < iC_t + (C_t - C_{t+1})$$

Die linke Seite stellt den Reingewinn des Jahres $t+1$ dar, die rechte Seite einen durchschnittlichen Gewinn für eine unendliche Kette aus neuen identischen Maschinen und ein Korrekturglied, das eine Preisschwankung oder Veraltung der neuen Anlage berücksichtigen soll. Vernachlässigt man dieses Korrekturglied, so entspricht diese Bedingung einer der beiden Ungleichungen, die man als Kriterium für den optimalen Ablösungszeitpunkt in einem Goodwill mit jährlichen Gewinnen und Zinseszinsen erwarten würde, doch müßte C_t nicht den Goodwill der neuen Anlage, sondern den Goodwill der unendlichen Kette der neuen Anlagen darstellen.

(4) Der Kostenvergleich von SCHNEIDER

E. SCHNEIDER baut für das Ersatzproblem in der Praxis ein Modell mit vereinfachten Voraussetzungen auf. Zur Lösung der Frage, ob die neue Kette sofort an die Stelle der alten treten soll oder erst am Ende der Nutzungsdauer der alten Anlage, vergleicht er die durchschnittlichen jährlichen Ausgaben in dem Zeitraum dazwischen. Die Betriebsausgaben werden als konstant angenommen, die durchschnittlichen Kapitalkosten mit Hilfe des Kapitalwiedergewinnungsfaktors ermittelt.

Die durchschnittlichen Nettoausgaben für die neue Anlage nennt E. SCHNEIDER U_n, die Annuität aus dem Restwert der alten Anlage zum Zeitpunkt 0 für den Zeitraum $o\text{-}t_a$ heißt σ_a^o. Die jährlichen Betriebsausgaben B_a der alten Anlage sind konstant. Der Restwert der alten Anlage am Ende der Nutzungsdauer t_a wird auf den Zeitraum $o\text{-}t_a$ verteilt. Es ergibt sich die Annuität $\sigma_a^{t_a}$.

Man vergleicht die beiden Alternativen durch Gegenüberstellung

der Annuitäten[1]:

$$U_n - \sigma_a^o \quad \text{und} \quad B_a - \sigma_a^{ta} \qquad (94)$$

Die Alternative mit den geringeren durchschnittlichen Kosten wird gewählt.

Dieses Modell SCHNEIDERs stellt einen Sonderfall der anderen Modelle für die Ablösung zweier Ketten aus jeweils identischen Gliedern dar.

(5) Der optimale Ablösungszeitpunkt im Goodwillmodell

Das ursprüngliche Goodwillmodell, wie man es bei LUTZ beschrieben findet, ist in dieser Form noch nicht voll ausgereift. Es bestand bisher nur in der stetigen Form, was der eleganten mathematischen Beweisführung, nicht aber der Praxis, die mit Zinseszins rechnet, entsprach. Wie der Anhang 4 zeigt, kann das Goodwillmodell ohne Schwierigkeiten für die Berücksichtigung von Zinseszinsen umgeformt werden.

Es bleibt noch eine zweite Unvollkommenheit, die CAPLAN anführte, der optimale Ablösungszeitpunkt ist für das Goodwillmodell noch nicht festgelegt. Diese Lücke soll nun ausgefüllt werden.

Den Kapitalwert der neuen Kette, die die bestehende Kette ablösen soll, symbolisiert $C_{\infty n}$. Das Element der alten Kette, das sich in Betrieb befindet, bringt in den Jahren 1, 2, 3, ... j die Gewinne d_1, d_2, d_3, ... d_j ein. Der Kapitalwert der gesamten kombinierten Kette setzt sich zusammen aus den jährlichen diskontierten Gewinnen bis zum Zeitpunkt der Ablösung, dem diskontierten Restwert am Zeitpunkt der Ablösung und dem Kapitalwert der unendlich langen neuen Kette, der auch vom Ablösungszeitpunkt auf den Betrachtungszeitpunkt o diskontiert wird.

Der Kapitalwert der gesamten kombinierten Kette sei $C_{\infty m}$,

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.98ff. Schneider, E.: Die wirtschaftliche Lebensdauer industrieller Anlagen, a.a.O. S.97ff.

wenn nach m Jahren die Ablösung erfolgt, und $C_{\infty\, m+1}$ bzw. $C_{\infty\, m-1}$, wenn die Ablösung nach m+1 bzw. m-1 Jahren erfolgt.

$$C_{\infty\, m} = \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} + R_m q^{-m} + C_{\infty\, n} q^{-m}$$

$$C_{\infty\, m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} d_j q^{-j} + R_{m-1} q^{-m+1} + C_{\infty\, n} q^{-m+1}$$

$$C_{\infty\, m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} d_j q^{-j} + R_{m+1} q^{-m-1} + C_{\infty\, n} q^{-m-1}$$

Die jährlichen Gewinne sind auf das Jahresende zusammengezogen. Der Ablösungszeitpunkt m ist der günstigste, wenn sein Kapitalwert für die gesamte kombinierte Kette größer als die beiden benachbarten Kapitalwerte ist.

$$C_{\infty\, m} - C_{\infty\, m-1} > 0$$

$$C_{\infty\, m} - C_{\infty\, m+1} > 0$$

In die erste Ungleichung werden die kombinierten Reihen eingesetzt:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \left(\sum_{j=1}^{m-1} d_j q^{-j} + R_{m-1} q^{-m+1} + C_{\infty n} q^{-m+1} \right) > 0$$

Die rechte Summe wird auf m Glieder ergänzt:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} - R_{m-1} q^{-m+1} - C_{\infty n} q^{-m+1} + d_m q^{-m} > 0$$

Die beiden Summen heben sich auf.

$$R_m q^{-m} + d_m q^{-m} - R_{m-1} q^{-m+1} + C_{\infty n} q^{-m+1}(q^{-1}-1) > 0$$

Multipliziert man beide Seiten der Ungleichung mit q^m und überträgt die Glieder, die den Kapitalwert der neuen Kette enthalten, auf die andere Seite der Ungleichung, so deutet sich das Ergebnis schon an.

$$d_m - R_{m-1} i - (R_{m-1} - R_m) > C_{\infty n}(q-1)$$

$$\boxed{d_m - R_{m-1} i - (R_{m-1} - R_m) > i C_{\infty n}} \qquad (95)$$

Die erste Bedingung sagt aus, daß im optimalen Ablösungszeitpunkt m die durchschnittlichen Gewinne der ablösenden Kette kleiner sind als der Gewinn der bestehenden Anlage im letzten vergangenen Jahr.

Um die zweite Bedingung zu erfahren, setzt man die kombinierten Reihen in die zweite Ungleichung ein.

$$C_{\infty m} - C_{\infty m+1} > 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \left(\sum_{j=1}^{m+1} d_j q^{-j} + R_{m+1} q^{-j-1} + C_{\infty n} q^{-j-1} \right) > 0$$

Aus der zweiten Summe läßt sich der Gewinn für das Jahr $m+1$ herauslösen.

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j} - d_{n+1} q^{-m-1} - R_{m+1} q^{-m-1} - C_{\infty n} q^{-m-1} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf. Man multipliziert die Ungleichung mit q^{m+1}.

$$R_m q - R_{m+1} - d_{m+1} + C_{\infty n} q - C_{\infty n} > 0$$

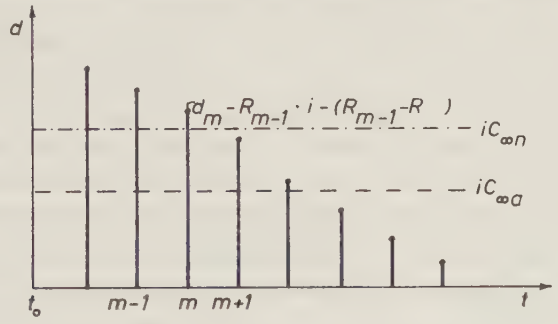
Der Faktor q wird in seine Summanden $1+i$ zerlegt und mit R_m ausmultipliziert. Die Summanden werden umgruppiert.

$$d_{m+1} - iR_m - (R_m - R_{m+1}) < iC_{\infty n} \qquad (96)$$

Die zweite Bedingung sagt aus, daß im optimalen Ablösungszeitpunkt der Gewinn der bestehenden Anlage im nächsten Jahr geringer als der durchschnittliche Gewinn der neuen Investitionskette ausfällt.

Beide Bedingungen zusammen legen als optimalen Ablösungszeitpunkt den Punkt fest, an dem die Gewinne des nächsten Jahres zum ersten Mal unter die durchschnittlichen Gewinne der neuen Kette sinken.

Optimale Kettenablösung bei Maximierung des Kapitalwertes



Figur 30

In dieser erweiterten Version des Goodwillmodells sind alle betrachteten Modelle enthalten. Die Modelle der Kostenminimierung stellen einen Sonderfall des Goodwillmodells mit konstanten Erträgen dar. Das Modell von CAPLAN macht eine grundsätzlich gleiche Aussage, nur ist die Rückwirkung der späteren Nachfolger nicht berücksichtigt und dafür eine mögliche Schwankung des Goodwills der neuen Anlage beachtet. Der Kostenvergleich von E.Schneider beschreibt den Sonderfall, daß außer den Einnahmen auch die Betriebsausgaben konstant sind und der Restwert auf einen Zeitraum gleichmäßig verteilt werden kann.

Schließlich ist auch die Aussage des ursprünglichen Goodwillmodells in diesen Bedingungen für den optimalen Ablösungspunkt enthalten. Wenn die durchschnittlichen Gewinne der neuen Kette gleich den durchschnittlichen Gewinnen der alten Kette sind, fällt der Ablösungszeitpunkt mit dem optimalen Ersatzzeitpunkt zusammen.

Das ursprüngliche Ersatzmodell bildet daher einen Sonderfall des Modells für die Ablösung einer Anlage durch eine neue Kette unter sich identischer Glieder.

b. Modellanalyse und Fehlerbetrachtung

Die Folge der Einnahmen und Ausgaben, aus denen sich die beschriebenen Investitionsketten zusammensetzen, sind als in Höhe und Verlauf bekannt vorausgesetzt. Für die Ersatzmodelle, die mit jährlichen Einnahmen und Ausgaben sowie mit durchschnittlichen Jahresgewinnen operieren, muß festgelegt werden, ob diese Zahlungsgrößen auf den Jahresanfang oder das Jahresende zusammengezogen werden sollen.

Der optimale Ablösungszeitpunkt für den Fall, daß die Gewinne am Jahresende auftreten, wurde im vorigen Abschnitt gezeigt. Treten die Gewinne am Jahresanfang auf, so bewirken sie veränderte Bedingungen für den Ablösungszeitpunkt.

Die beiden Ungleichungen, die den optimalen Ablösungszeitpunkt festlegen, lauten[1]:

$$\begin{array}{|l|}\hline iC_{\infty n} < d_m q - iR_{m-1} - (R_{m-1} - R_m) \\ \hline iC_{\infty n} > d_{m+1} q - iR_m - (R_m - R_{m+1}) \\ \hline \end{array} \qquad (97)$$

Der Rohgewinn setzt sich aus der Differenz von Einnahmen und Ausgaben zusammen. Sollen diese beiden Komponenten auf verschiedene Zeitpunkte zusammengezogen werden, so empfiehlt es sich, die Komponente, die am Jahresanfang auftritt, für ein

[1] Der Beweis für diese Änderung ist in Anhang 5 gezeigt.

Jahr zu verzinsen und dann mit der zweiten Komponente zu vereinigen. In den anderen Modellen, die mit jährlichen Größen operieren, macht sich die Verlagerung der Einnahmen und Ausgaben vom Jahresanfang auf das Jahresende nur durch einen Faktor q an der jährlichen Größe der Kosten oder Erträge bemerkbar, Restwertverzinsung und Restwertänderung bleiben unberührt.

Die Berücksichtigung des technischen Fortschrittes spielt in der Diskussion um die Investitionsmodelle eine bedeutende Rolle[1]. Seine Gegenwart tritt besonders in den Ersatzmodellen heraus, da diese sich über einen beliebig großen Zeitraum erstrecken. Für die Investitionsrechnung interessiert nur die Komponente des technischen Fortschrittes, die in wirtschaftlichen Größen meßbar ist.

Löst eine Kette mit einem höheren Kapitalwert eine andere bestehende ab, so ist in diesem Augenblick der technische Fortschritt berücksichtigt. In der Berechnung des optimalen Ablösungszeitpunktes wird die verbesserte Kette als Kette aus identischen Gliedern eingesetzt, das bedeutet, es wird implizit angenommen, daß kein weiterer technischer Fortschritt erfolgt. Tritt der Fortschritt in der Form einer verbesserten Kette trotzdem wieder auf, so wird erneut abgelöst.

Ebenso, wie in einer unendlich langen Kette aus identischen Gliedern alle folgenden Glieder einen gewissen Einfluß auf die Lage des Ersatzzeitpunktes besitzen, müßte der immer wieder auftretende technische Fortschritt einen Einfluß auf die Lage des optimalen Ablösungszeitpunktes haben. Bei Berücksichtigung wirkt er verkürzend auf die Nutzungsdauer.

Beide Bedingungen für den optimalen Ablösungszeitpunkt bestehen bei allen betrachteten Modellen aus einem jährlichen Durchschnittswert und einem Einzelwert. Man kann von beiden Seiten der Ungleichung einen bestimmten Wert subtrahieren, ohne daß sich die Aussage verändert. Der optimale Ablösungs-

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O.
Smith, V.L.: Economic Equipment Policies: An Evaluation, in: Management Science Vol. 4 1957, S.22.

zeitpunkt ändert sich nicht, wenn beispielsweise von allen Rohgewinnen die gleiche Konstante abgezogen wird, weil sich dann auch der Durchschnitt von allen Gewinnen um die gleiche Größe vermindert[1].

Aus dieser Tatsache erwächst die Möglichkeit, bei Vergleichen von mehreren Alternativen die Kosten oder Erträge, die allen Objekten gemeinsam entstehen, aus dem Vergleich herauszulassen. Bei der Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer oder dem optimalen Ablösungszeitpunkt spielen alle im Gewinn enthaltenen Größen, die sich zeitlich nicht verändern, keine Rolle, sie können aus der Rechnung herausgelassen werden[2].

Die Fehlerermittlung mit Hilfe einer analytischen Fehlerabschätzung führt zu komplizierten Ausdrücken. Bei der Berechnung des optimalen Ablösungszeitpunktes treten eine jährliche Größe und eine durchschnittliche Größe auf. Die durchschnittliche Größe, im Goodwillmodell beispielsweise der durchschnittliche Gewinn, wird aus dem Kapitalwert der gesamten unendlichen Kette gebildet.

Um den Zinsfehler abschätzen zu können[3], differenziert man den durchschnittlichen Gewinn nach i.

$$\frac{d(iC_{\infty n})}{di} = \frac{1-q^{-n} - ing^{-n-1}}{(1-q^{-n})^2}\left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n}\right) -$$

$$- \frac{i}{1-q^{-n}}\left(\sum_{j=o}^{n} j d_j q^{-j-1} + nR_n q^{-n-1}\right)$$

---

[1] Der Beweis für diese Aussage wird in Anhang 6 durchgeführt.

[2] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.440.

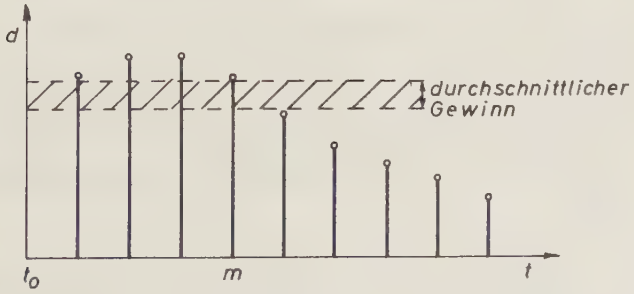
[3] Zur Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer bei einfachem Zins vgl. Dürr, K.: Investitionsrechnung Bd. I, Allgemeine Investitionsrechnung und Grundlagen der Wirtschaftsmathematik, Bern 1958, S.170ff.

Der Zinsfehler des durchschnittlichen Gewinnes für die unendlich lange Kette besitzt große Ähnlichkeit mit dem Zinsfehler einer Annuität.

$$f_{(iC_{\infty n})i} = f_i\Big(\Big(1 + \frac{1}{q^n-1} - \frac{inq^{n-1}}{(q^n-1)^2}\Big)\Big(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n}\Big) - \frac{iq^n}{q^n-1}\Big(\sum_{j=o}^{n} j d_j q^{-j-1} + nR_n q^{-n-1}\Big)\Big) \tag{98}$$

Der Zinsfehler tritt auch in den jährlichen Gewinnen auf, da der Restwert am Anfang des betrachteten Jahres verzinst wird. Je nach Höhe des Restwertes am Zeitpunkt der Ablösung oder des Ersatzes fällt der Fehler etwas größer oder kleiner aus. Kleine Zinsfehler des durchschnittlichen Gewinnes brauchen den optimalen Ersatzzeitpunkt nicht zu verschieben, wenn dieser nicht an einem kritischen Punkt liegt.

Abweichung des durchnittlichen Gewinns im Ersatzmodell



Figur 31

Die unstetige Struktur des Verlaufes der jährlichen Gewinne erlaubt es, daß der durchschnittliche Gewinn auf Grund von Zinseinfluß innerhalb der in Figur 31 gezeigten Grenzen schwanken kann, ohne daß der optimale Ablösungszeitpunkt verschoben wird.

Der Fehler im durchschnittlichen Gewinn, der durch Abweichung des einzelnen Jahresgewinnes d_j entsteht, läßt sich folgendermaßen ermitteln. Man differenziert den durchschnittlichen Gewinn nach dem betrachteten Jahresgewinn und multipliziert das Ergebnis mit der Gewinnabweichung.

$$\frac{d(iC_{\infty n})}{dd_j} = \frac{iq^{-j}}{1 - q^{-n}}$$

Der Fehler beträgt:

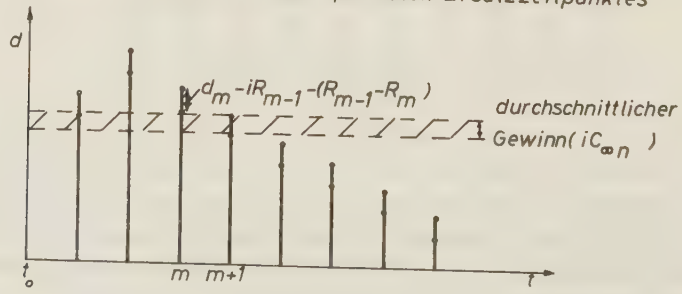
$$f_{(iC_{\infty n})d_j} = f_{dj} \frac{iq^{-j}}{1 - q^{-n}} \qquad (99)$$

Schwanken mehrere Gewinne, so ergibt sich der Gesamtfehler $f_{(iC_{\infty n})d}$ als die Summe aller Einzelfehler.

$$f_{(iC_{\infty n})d} = \frac{i}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} f_{dj} q^{-j} \qquad (100)$$

Der einzelne Jahresgewinn unterliegt neben der Abweichung durch Einnahmen- und Ausgabenschwankungen auch noch dem Einfluß einer Bewegung der Restwertminderung.

Die Empfindlichkeit des optimalen Ersatzzeitpunktes



Figur 32

Die Gewinnfehler und der Zinsfehler addieren sich im durch-

schnittlichen Gewinn zu einer gewissen Größe, um die der Betrag des durchschnittlichen jährlichen Gewinnes schwankt. Durch die Vielzahl der äußeren Einflüsse kann auch der jährliche Gewinn um einen gewissen Betrag schwanken. Er erfüllt trotzdem meistens die Voraussetzung, daß er zeitlich monoton sinkt, wenn er höchstens ein Maximum durchlaufen hat. Damit sind dem optimalen Ablösungszeitpunkt stets enge Grenzen gesetzt.

Figur 32 zeigt eine Möglichkeit, wie sich der durchschnittliche jährliche Gewinn der Kette und der jährliche Gewinn des bestehenden Objektes verhalten können. Trotz starker Schwankung beider Größen liegt der optimale Ablösungszeitpunkt zwischen m und $m+1$.

2. Der Ersatz plötzlich versagender Objekte

a. Der Aufbau des Modells von RIFAS

Die elektronischen Hilfsmittel der Produktion und der Datenverarbeitung bestehen zum Teil aus Einheiten, die nicht stetig in ihrer Leistung nachlassen, sondern plötzlich ausfallen. Zu dieser Art von Einheiten gehören beispielsweise Glühbirnen, Röhren, Transistoren, Kondensatoren, Schalter und Photozellen. Als entsprechende Einheiten aus dem mechanischen Bereich der Anlagen lassen sich Wellenlager, Stahlfedern, Druckschläuche und Heizschlangen aufzählen. Auch Kombinationen von mehreren Einheiten zu einer Gruppe können für sich als Einheit gesehen werden, wenn die Funktion eines größeren Aggregates von einer Anzahl solcher Kombinationen abhängt.

Über den Ersatz von Gruppen, die aus plötzlich versagenden Einheiten bestehen, existiert eine Vielzahl von Lösungsansätzen[1].

---

[1] Vgl. u.a.:
Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.448ff.
Dreyfus, S.: Dynamic Programming, in: Progress in Operations Research (Hrsg. Ackoff, R.L.) ORSA Nr. 5, New York-London 1961, S.227ff.
Dean, B.V.: Replacement Theory, in: Progress in Operations Research, (Hrsg. Ackoff, R.L.) ORSA Nr. 5, New York-London 1961, S.327ff.
Debeau, D., James, G., Drozda, W.: Component Replacement Liability, in: Management Science (nachfolgend MS), Vol. 6 1960, S.295ff.
Eisen, M., Leibowitz, M.: Replacement of Randomly Deteriorating Equipment, in: MS Vol. 9 1963, S.268ff.
Jorgenson, D.W., McCall, J.J.: Optimal Replacement Policies for a Ballistic Missile, in: MS Vol. 9 1963, S.358ff.
Radner, R., Jorgenson, D.W.: Opportunistic Replace of a Single Part in the Presence of Several Monitored Parts, in: MS Vol. 10 1963, S.70ff.
McCall, J.J.: Operating Characteristics of Opportunistic Replacement and Inspection Policies, in: MS Vol. 10 1963, S.8ff.
McCall, J.J.: Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey, in: MS Vol. 11 1965, S.493ff.
Naik, M.D., Nair, K.P.K.: Multistage Replacement Strategies, in: Operations Research, Vol. 13 1965, S.279.
Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, a.a.O. S.115ff.

Aus der Vielzahl der möglichen Problemstellungen wird hier nur eine einzige herausgegriffen, die diese Gruppe der Ersatzmodelle besonders anschaulich repräsentiert. Der Ertrag der Anlage, die sich aus einem System von Einheiten gleichen Charakters aufbaut, soll als konstant vorausgesetzt sein. Jede ausfallende Einheit muß bis zum Ende der Periode, in der sie versagt hat, ersetzt worden sein. Über den Zeitpunkt des Ausfalls jeder Einheit existiert keine Information, doch ist bekannt, daß von der Gesamtheit der Einheiten in jedem Alter ein bestimmter Anteil versagt. Die Verteilung der Versager als Funktion des Alters der Einheiten wird gegeben[1].

Für die Ersatzstrategie bestehen grundsätzlich drei Möglichkeiten:

1) Nur ausgefallene Einheiten werden ersetzt. Die Kosten für den Ersatz und den Betrieb bei dieser Strategie bauen sich vornehmlich aus Einzelreparaturkosten und Ausfallkosten der Anlage auf. Die Materialkosten sind minimal.

2) Wenn eine einzelne Einheit versagt, werden sofort alle Einheiten ausgewechselt. Die Ausfallkosten sind minimal, die Materialkosten sind erheblich.

3) Jeder Ausfall wird einzeln ersetzt und außerdem die gesamte Gruppe in gewissen Zeitabständen erneuert.

Das Verhältnis der Einzelreparaturkosten zu den Ausfallkosten und den Materialkosten bestimmt die Ersatzstrategie. Gesucht wird das Kostenminimum.

Bevor man die Kosten betrachtet, sei kurz die Dichte der Versager als Funktion des Alters untersucht. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einheit t Perioden überlebt, wird durch $P(t)$ symbolisiert[2].

---

[1] Den Lösungsweg für dieses Problem zeigen u.a. folgende Autoren:
Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.448ff.
Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, a.a.O. S.116ff.

[2] Vgl. Dean, B.V.: Replacement Theory, a.a.O. S.352.

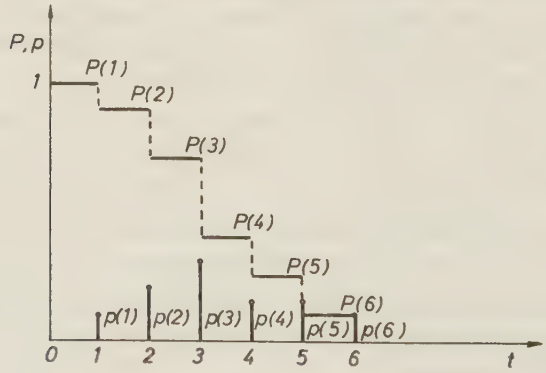
$P(0) = 1$, alle Objekte erleben den Zeitpunkt null.

$1 \geq P(t) \geq 0$ für $t \geq 0$

Die Rate des Ausfalls $p(t)$ wird folgendermaßen definiert[1]: $p(t)\,dt$ = die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einheit, die bis zum Zeitpunkt t gelebt hat, zwischen t und $t+dt$ versagen wird.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit stellt eine monoton fallende Funktion der Zeit dar. Figur 33 zeigt einen möglichen Verlauf für die Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn der Ausfall nur in zeitlich endlich großen gleichen Intervallen festgestellt wird.

Zeitlicher Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeit



Figur 33

Aus dieser Verteilung der noch funktionierenden Einheiten über ihr Alter läßt sich eine mittlere Lebensdauer t_m Einheiten ermitteln.

$$t_m = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(t_j)(t_{j+1} - t_j)}{\sum_{j=1}^{n} (t_{j+1} - t_j)}$$

[1] Vgl. Dean, B.V.: Replacement Theory, a.a.O. S.352.

Die zeitlichen Intervalle sind gewöhnlich gleich groß. Somit ergibt sich die mittlere Lebensdauer zu:

$$t_m = \sum_{j=1}^{n} P(t_j) \qquad (101)$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ausfälle $p(j)$ für ein Zeitintervall ist ebenfalls in Figur 33 eingezeichnet. Sie stellt den negativen Wert der Änderung von $P(t)$ dar. Die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt multipliziert mit der Menge der Objekte, die das entsprechende Alter besitzen, den Ausfall in diesem Alter.

Die Ausfallrate $f(t)$ eines Systems von Einheiten baut sich folgendermaßen auf[1]:
$f(0) = N$, wenn N die Anzahl aller betrachteten Einheiten darstellt. Zum Zeitpunkt null sind alle Einheiten ersetzt worden, sind also neu.

$$f(1) = f(0)\, p(1)$$

Der Anteil $f(0)p(1)$ aller Einheiten ist am Ende des ersten Zeitintervalls ausgefallen und muß ersetzt werden.

$$f(2) = p(1)f(1) + p(2)f(0)$$

Außer dem Anteil $p(2)f(0)$ der zweijährigen Einheiten der Menge der zum Zeitpunkt null eingesetzten Gesamtheit ist auch noch der durch die Ausfallwahrscheinlichkeit $p(1)$ betroffene Anteil der nun einjährigen Einheiten, die zum Zeitpunkt 1 eingesetzt wurden, ausgefallen.

$$f(3) = p(1)f(2) + p(2)f(1) + p(3)f(0)$$

Für ein beliebiges Intervall t wird $f(t)$ bestimmt zu[2]:

---

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff,R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.453.
Dean, B.V.: Replacement Theory, a.a.O. S.355.

[2] Vgl. Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, a.a.O. S.118.

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} p(j) f(t-j) \qquad (t-j \geq 0) \qquad (102)$$

n stellt die maximale Lebensdauer einer Einheit dar.

Die Ausfallrate der Gesamtheit aller Einheiten, die in dem betrachteten System enthalten sind, schwankt mit fortschreitender Zeit oszillierend um den reziproken Wert der mittleren Lebensdauer t_m und nähert sich ihm. Die gleiche Aussage läßt sich auch durch Transformation mit Hilfe einer Matrix erreichen[1]. Der Ausfall in den einzelnen Perioden nach jeder Erneuerung der gesamten Gruppe ist damit fixiert.

Die Gesamtkosten für den Ersatz betragen für die Betrachtung von n Zeiteinheiten:

$$A(n) = f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{n-1} f(t)$$

a_1 = Kosten pro Einheit bei gruppenweiser Erneuerung.
a_2 = Kosten pro Einheit bei Einzelersatz.
$f(t)$ = Ausfallquote des Zeitabschnittes t.
$f(0)$ = Anzahl der Einheiten in der Gruppe.
$A(n)$ = Gesamtkosten für den Ersatz, wenn nach n Intervallen die gesamte Gruppe erneuert werden soll.

Im Modell von RIFAS werden keine Zinsen berücksichtigt. Die Kosten pro Zeitabschnitt erhält man aus den Gesamtkosten, indem durch n dividiert wird.

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{f(0)\, a_1}{n} + \frac{a_2}{n} \sum_{t=1}^{n-1} f(t)$$

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.456ff.
Dean, B.V.: Replacement Theory, a.a.O. S.355.

Für ein gegebenes Verhältnis der Ersatzkosten pro Einheit a_1/a_2 entwickelt RIFAS folgende Bedingungen für das Minimum der durchschnittlichen Kosten pro Zeitabschnitt:

$$f(T) > \frac{f(0)\,\frac{a_1}{a_2} + \sum_{t=1}^{T-1} f(t)}{T}$$

$$f(T-1) < \frac{f(0)\,\frac{a_1}{a_2} + \sum_{t=1}^{T-2} f(t)}{T-1} \qquad (103)$$

Diese beiden Ungleichungen stimmen grundsätzlich mit den bisher in den Ersatzmodellen ermittelten Ungleichungen über den optimalen Ablösungszeitpunkt überein. Es wird eine Menge mit dem zeitlichen Durchschnitt einer Menge verglichen. Die Gewichtung von $f(0)$ mit dem Verhältnis der Einheitsersatzkosten von Gruppen- und Einzelersatz a_1/a_2 entspricht der Umrechnung der Gesamtheit der erneuerten Einheiten in Einzelerneuerungen.

Der optimale Ersatzzeitpunkt ist gekommen, wenn die Anzahl der Einzelausfälle zum ersten Mal den zeitlichen Durchschnitt aus Einzelausfällen und in Einzelausfällen ausgedrückter Gesamterneuerung übersteigt.

b. Die Einführung von Zinsen in das RIFASsche Modell

Das Modell von RIFAS wird ohne die Berücksichtigung einer Verzinsung gezeigt. RIFAS deutet jedoch an, daß bei längerer Lebensdauer Diskontfaktoren berücksichtigt werden sollen[1]. Ein Ansatz mit Zinseszinsen soll hier gezeigt werden.

Nimmt man an, daß die gleiche Ersatzstrategie an dem System

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.461.

unendlich oft wiederholt wird, so ergeben sich bei einem bestehenden System aus neuen Einheiten für den Gruppenaustausch nach T Jahren die Gesamtkosten A(T) . Für den Austausch nach T+1 bzw. T-1 Jahren betragen die Gesamtkosten der ganzen Kette A(T+1) bzw. A(T-1) .

$$A(T) = \frac{1}{1-q^{-T}} \left(f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t} \right)$$

$$A(T-1) = \frac{1}{1-q^{-T+1}} \left(f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{T-2} f(t)q^{-t} \right)$$

$$A(T+1) = \frac{1}{1-q^{-T-1}} \left(f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{T} f(t)q^{-t} \right)$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum der Gesamtkosten A(T) bedeutet, daß sowohl A(T-1) als auch A(T+1) größer als A(T) sind. Als erste Bedingung muß erfüllt sein:

$$A(T-1) - A(T) > 0$$

In diese Ungleichung werden die obigen Ausdrücke eingesetzt.

$$\frac{1}{1-q^{-T+1}}\left(f(0)a_1+a_2\sum_{t=1}^{T-2} f(t)q^{-t}\right)-\frac{1}{1-q^{-T}}\left(f(0)a_1+a_2\sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t}\right) > 0$$

Die Ungleichung wird mit $(1-q^{-T+1})$ multipliziert und die erste der beiden Summen auf T-1 Glieder ergänzt.

$$f(0)a_1+a_2\sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t}-a_2 f(T-1)q^{-T+1}-\frac{1-q^{-T+1}}{1-q^{-T}}\left(f(0)a_1+a_2\sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t}\right) > 0$$

Man vereinigt die beiden Summen nun und addiert $a_2 f(T-1)q^{-T+1}$ auf beiden Seiten der Ungleichung, um zu folgender Form zu

gelangen:[1]

$$\frac{1-q^{-T} - 1+q^{-T+1}}{1-q^{-T}}(f(0)a_1+a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t}) > a_2 f(T-1)q^{-T+1}$$

Beide Seiten werden mit q^{T-1} multipliziert und das Ergebnis zeigt die erste Bedingung für das Kostenminimum.

(104)

$$\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-T}} \left(f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t} \right) > a_2 f(T-1)$$

Die erste Bedingung besagt, daß die Kosten des Einzelersatzes im Jahre T-1 kleiner sein müssen als das gewogene arithmetische Mittel der diskontierten Gesamtkosten.

Die zweite Bedingung für ein Kostenminimum bei einem Gruppenaustausch nach T Jahren lautet:

$$A(T+1) - A(T) > 0$$

$$\frac{1}{1-q^{-T-1}}(f(0)a_1+a_2 \sum_{t=1}^{T} f(t)q^{-t}) - \frac{1}{1-q^{-T}}(f(0)a_1+a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t}) > 0$$

Nach dem Herauslösen des letzten Gliedes aus der ersten Summe, einer Multiplikation der ganzen Ungleichung mit $(1-q^{-T-1})$ und der Division der Ungleichung durch q^{-T} erhält man:

$$a_2 f(T) + \frac{-1 + q^{-1}}{1 - q^{-T}} \left(a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t} + f(0)a_1 \right) > 0$$

Durch Subtraktion des linken Summanden von beiden Seiten der Ungleichung erreicht diese ihren endlichen Zustand.

---

[1] Nach Erweiterung des Ausdrucks um die linke Summe mit $1-q^{-T}$ besitzen beide Summen den gleichen Nenner und können vereinigt werden.

$$\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-T}} \left(f(0)a_1 + a_2 \sum_{t=1}^{T-1} f(t)q^{-t} \right) < a_2 f(T) \qquad (105)$$

Die beiden auf diesem Wege ermittelten Bedingungen für den optimalen Zeitpunkt einer Gruppenerneuerung können noch in einer anderen Form geschrieben werden, wenn man den Faktor der linken Seite in die entsprechende Summe umwandelt.

$$a_2 f(T-1) < \frac{f(0)a_1 + f(1)a_2 q^{-1} + f(2)a_2 q^{-2} + \ldots + f(T-1)a_2 q^{-T+1}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-T+1}} \qquad (106)$$

$$a_2 f(T) > \frac{f(0)a_1 + f(1)a_2 q^{-1} + f(2)a_2 q^{-2} + \ldots + f(T-1)a_2 q^{-T+1}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-T+1}} \qquad (107)$$

Die gesamte Gruppe der Einheiten ist immer dann auszutauschen, wenn die Kosten des Einzelersatzes des nächsten Jahres zum ersten Mal höher als das gewogene arithmetische Mittel der vergangenen Jahre ausfallen.

c. Fehlerauswirkung

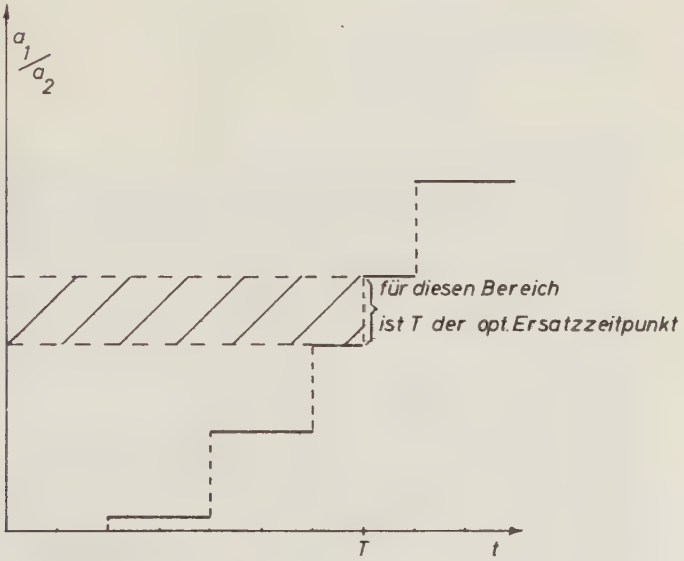
Die Gleichungen (104) bis (107) zeigen, daß die Zinsen in diesem Ersatzmodell nur geringen Einfluß auf die Lage des optimalen Ersatzzeitpunktes besitzen. Zinsschwankungen werden sich daher so geringfügig auswirken, daß sie in der Regel vernachlässigt werden können.

Wie RIFAS zeigt[1], ergibt sich für den optimalen Zeitpunkt des Gruppenersatzes und das Kostenverhältnis a_1/a_2 eine stufen-

[1] Vgl. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.467.

förmige Beziehung. Die beiden Kostengruppen bewirken nur dann eine Änderung des optimalen Ersatzzeitpunktes, wenn sie in der Weise abweichen, daß die Schwankung des Verhältnisses eine senkrechte Stufe übersteigt.

Der optimale Ersatzzeitpunkt plötzlich versagender Objekte



Figur 34

Für jeden Ersatzzeitpunkt besteht bei konstanter Ausfallverteilung ein Band, in dem der Quotient a_1/a_2 schwanken kann.

Das gezeigte Beispiel stellt nur eine Möglichkeit und einen Sonderfall aus der Vielfalt der möglichen Ansätze für Systeme aus versagenden Einheiten dar. Besonders in der Lite-

ratur zur Unternehmensforschung existiert eine stattliche Anzahl von Veröffentlichungen[1], die außer der optimalen Ersatzstrategie auch die optimale Pflege und Inspektion für solche Systeme untersuchen. Zuverlässigkeit und Dienstbereitschaft des Systems treten als wichtige zusätzliche Bedingungen oder als Ziele in die Modelle ein.

---

[1] Vgl. u.a.
Kettelle, J.D.: Least-Cost Allocation of Reliability Investment, in: Operations Research Vol. 10 1962, S.249ff.
Truelove, A.J.: Strategic Reliability and Preventive Maintenance, in: Operations Research Vol. 9 1961, S.22ff.
Fisher, J.L.: A Class of Stochastic Investment Problems, in: Operations Research Vol. 9 1961, S.53ff.
Greenberg, H.: Failure Testing in Preventive Maintenance, in: Operations Research Vol. 8 1960, S.406.
Barlow, R., Hunter, L.: Optimum Preventive Maintenance Policies, in: Operations Research Vol. 8 1960, S.90.
Bosford, J.E.: Measures of Dependability, in: Operations Research, Vol. 8 1960, S.53.
Flehinger, B.J.: System Reliability as a Function of System Age; Effects of Intermittent Component Usage and Periodic Maintenance, in: Operations Research, Vol. 8 1960, S.30ff.
Buzzanca, V., Goldstein, M.H.: Equipment Maintenance Procedures, in: Operations Research Vol. 11 1963, S.519ff.
Jaiswal, N.K., Thiruvengadam, K.: Simple Machine Interference with Two Types of Failure, in: Operations Research Vol. 11 1963, S.624ff.
Jorgenson, D.W., McCall, J.J.: Optimal Scheduling of Replacement and Inspection, in: Operations Research, Vol. 11 1963, S.732.
Sandiford, P.J., Bernholtz, B., Shelson, W.: Three Applications of Operations Research in a Large Electric Utility, in: Operations Research, Vol. 4 1956, S.663ff.
Phipps, T.E.: Machine Repair as a Priority Waiting-Line Problem, in: Operations Research, Vol. 4 1956, S.76ff.
Crookes, P.C.I.: Replacement Strategies, in: OR Operational Research Quarterly, Vol. 14 1963, S.167ff.
Bartholomew, D.J.: Two-stage Replacement Strategies, in: OR Operational Research Quarterly Vol. 14 1963, S.71ff.
Morse, P.M.: Queues, Inventories and Maintenance, Publications, in: Operations Research Nr. 1 New York - London 1963, S.157ff.

E. Das Modell der ersten MAPI - Methode

1. Modellbeschreibung

GEORGE TERBORGH behandelte in seinen Veröffentlichungen Dynamic Equipment Policy[1] und MAPI Replacement Manual[2] zum ersten Male dieses Ersatzmodell. Um es beschreiben zu können, muß man vorher die verwendeten Definitionen aufführen:

"Adverse minimum.	The lowest time-adjusted annual average of operating inferiority and capital cost obtainable from the equipment in question.
Capital cost.	The average annual cost of capital recovery and interest.
Challenger.	The proposed equipment.
Conversion value.	The value of the existing equipment for alternative use within the same ownership.
Defender.	The equipment or layout it is proposed to replace.
Operating inferiority.	The amount by which a facility is operationally inferior to its best alternative.
Time-adjusted average.	Uniform annual aquivalent." [3]

In der deutschsprachigen Literatur sind diese Begriffe zum Teil unterschiedlich übersetzt. Der Defender stellt die gegebenenfalls zu ersetzende Anlage und der Challenger die gegebenenfalls für den Ersatz in Frage kommende Anlage dar.

---

[1] Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, New York - Toronto - London 1949.
Carson, G.B.: Production Handbook, New York 1959, S.22.15ff.
v.Briel, N.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, Diss. Winterthur 1955, S.102ff.

[2] Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual, Chicago Ill. and Crawfordsville, Ind., 1950.

[3] Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual, a.a.O. S.75.

Operating inferiority wird Intensitätsnachteil[1], betriebliche Minderwertigkeit oder Minderleistung[2] genannt. Sie stellt den durch Veraltung und Verschleiß bewirkten, in Geldeinheiten bewerteten Unterschied der Leistungserstellung zwischen dem Defender und dem besten Challenger dar. Den jährlichen Anstieg des Intensitätsnachteils nennt man Intensitätsabnahme oder Jahressteigungsgrad der betrieblichen Minderleistung. Die Intensitätsabnahme unterliegt einem linearen Verlauf. Der niedrigste Durchschnitt der zeitberichtigten Summe von Intensitätsnachteil und Kapitalkosten, Adverse minimum, wird minimaler durchschnittlicher Verfahrensnachteil oder Verlustminimum genannt.

Der Intensitätsnachteil besteht zu einem Teil aus der leistungsmäßigen Unterlegenheit des Defenders gegenüber einer identischen neuen Maschine und zum anderen Teil aus der leistungsmäßigen Unterlegenheit der neuen identischen Maschine gegenüber dem besten existierenden Challenger[3]. Die erste Komponente bewirkt der Verschleiß, die zweite die Veraltung oder technische Überholung. Diese tritt zwar in Wirklichkeit unregelmäßig auf, doch wird ihr eine gewisse Verteilung über die Zeit unterstellt. TERBORGH nimmt an, daß der Intensitätsnachteil mit der Zeit linear wächst. Jeder Challenger wird nach einiger Zeit wieder auf neue Challenger treffen.

Die Kapitalkosten des Objektes nehmen mit der Zeit ab. Sie bestehen aus Restwertminderung und Zinsen auf den Restwert[4].

Aus Intensitätsnachteil und Kapitalkosten bildet man für verschiedene Nutzungsdauern den Durchschnittswert (durchschnittlicher Verfahrensnachteil) und sucht sein Minimum.

---

[1] Schindler, H.: Investitionsrechnungen..., a.a.O. S.77.

[2] Vgl. Schwan, H.S.: Die Ersatzbeschaffung von Maschinen und Anlagen, in: Handbuch des Industrial Engineering, Gestaltung, Planung und Steuerung industrieller Arbeit, VII, Gestaltung von Fabrikanlagen, Betriebsmitteln und Erzeugnissen, S.124ff.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.61.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen..., a.a.O. S.76ff.

[4] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.78ff.

Die Nutzungsdauer, für die sich der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil ergibt, ist im wirtschaftlichen Sinne optimal. Nimmt der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil des Challengers einen geringeren Wert als der des Defenders an, so wird der Defender ersetzt[1]. Der Ablösungszeitpunkt ist dann gekommen, wenn die Summe aus Intensitätsnachteil und Kapitalkosten der alten Anlage für das nächste Jahr höher als der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil ist.

Damit wurde der Charakter der ersten MAPI-Methode umrissen. Nun soll das Modell und ein Teil der von TERBORGH vorgenommenen Vereinfachungen näher beleuchtet und gleichzeitig mit den Ersatzmodellen von Schneider[2] und Churchman[3] sowie den Goodwill-Modellen[4] verglichen werden.

2. Modellerklärung

a. Die Struktur der Investitionskette

G. TERBORGH nennt noch zwei grundlegende Prämissen für sein Modell:

1. Zukünftige Challenger sollen den gleichen minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil wie der jetzige besitzen[5].
2. Der Intensitätsnachteil des gegenwärtigen Challengers soll sich über die Nutzungsdauer mit einer konstanten Zuwachsrate anhäufen[6].

Die erste Annahme gleicht der Aussage in den bekannten Ersatzmodellen für Ketten aus identischen Gliedern. Das Minimum der durchschnittlichen Kosten besitzt für jedes Glied die gleiche Höhe. Die Glieder der Kette, deren erstes der Challenger dar-

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.74.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.81ff.

[3] Vgl. Churchman, C.W.; Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.442ff.

[4] Vgl. Schneider, D.: Die wirtschaftl. Nutzungsdauer..a.a.O.S.54ff.

[5] "Future challengers will have the same adverse minimum as the present one." Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy,a.a.O.S.64.

[6] "The present challenger will accumulate operating inferiority at a constant rate over its service life." Ebenda, S.65.

stellt, sind also identisch. Dieser mathematisch beweisbare Tatbestand erscheint für diese Kette nicht gleich einleuchtend, da die Challenger mit ihren Erträgen und Kosten ~~ja~~ nicht identisch sind. Doch baut sich die Kette aus den Ertrags- und Kostendifferenzen, die zwischen jedem Challenger und seinem Nachfolger bestehen, plus den Kapitalkosten auf. Diese Differenzen nehmen für alle Challenger die gleiche Größe an[1]. Jeder Challenger besitzt also gegenüber seinem Nachfolger einen zeitlich identisch verlaufenden Intensitätsnachteil und identisch verlaufende Kapitalkosten.

Man kann vom RIFASschen Modell[2] zu einem gleichgearteten Modell auf reiner Kostenbetrachtung - also mit konstanten Erträgen - gelangen, wenn man die Ablösung einer Kette identischer Glieder durch eine andere Kette identischer Glieder regelmäßig wiederholt und der technische Fortschritt über eine monoton steigende Kostengröße erfaßt wird.

Die zweite Annahme, daß die Intensitätsabnahme eines Challengers linear verlaufen soll, vereinfacht den praktischen Ansatz der Methode erheblich. Zu der Zeit, als diese Annahme gemacht wurde, existierte die Kenntnis einer besseren Möglichkeit noch nicht[3].

Der Verlauf des durchschnittlichen Verfahrensnachteils als Funktion des Ersatzzeitpunktes n sinkt für kleine n, da dort die Kapitalkosten überwiegen, durchläuft ein Minimum und steigt für größere n monoton an, weil der Intensitätsnachteil dann schneller steigt als die Kapitalkosten sinken[4].

---

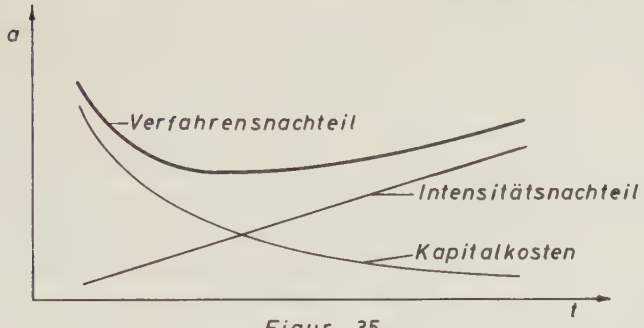
[1] Vgl. Schindler, H.: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, in: ZfhF Neue Folge 8. Jg. 1956, S.469ff.

[2] Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S439ff.
Dean, B.V.: Replacement Theory, in: Progress in Operations Research (Hrsg. Ackoff, R.L.), ORSA Nr. 5, New York, London 1961, S.341f.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.73.

[4] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.78ff.
Schwan, H.S.: Die Ersatzbeschaffung..., a.a.O. S.128.

Der Verfahrensnachteil als Funktion der Zeit



Figur 35

Das Minimum könnte man nach der Methode von RIFAS oder nach dem Muster irgendeines Ersatzmodelles bestimmen. Es liegt dort, wo die Summe aus Kapitalkosten und Intensitätsnachteil des nächsten Jahres die Kurve des durchschnittlichen Verfahrensnachteiles schneidet[1]. G. TERBORGH beschreitet, nachdem er einige ausführliche Beispiele auf herkömmliche Art gelöst hat[2], neue Wege, um den Rechengang so weit zu vereinfachen, daß er praktisch verwendbar ist.

b. Der Ersatzzeitpunkt

Wichtig zum Verständnis der ersten MAPI-Formeln ist die zeitliche Betrachtungsrichtung G. TERBORGHs: "Replacement comparisons are concerned with the future, and with the future only."[3] Alles, was vor dem Betrachtungszeitpunkt geschah, hat keinen Einfluß auf die Ersatzentscheidung.

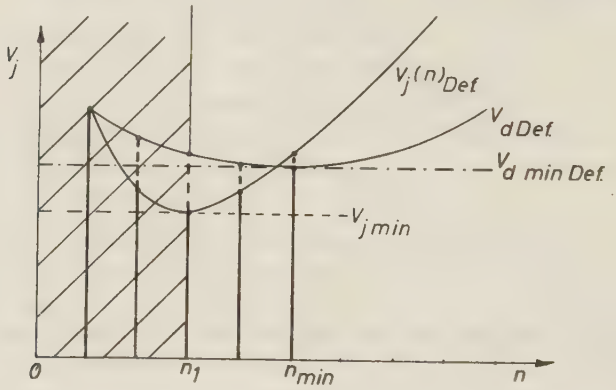
G. TERBORGH macht eine vereinfachende Annahme für den Defender, um viel Rechenarbeit zu ersparen. Wenn ein Wirtschaftsgut alt genug ist, um Objekt einer Ersatzanalyse zu sein, kann man gewöhnlich annehmen, daß die nächstjährige Summe aus Kapitalkosten und Intensitätsnachteil kleiner ist als der kleinste

---

[1] Vgl. Schindler, H.: Investitionsrechnungen in ..., a.a.O. S.93.
[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.75ff.
[3] Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.38.

Durchschnitt für jeden längeren zukünftigen Zeitraum, der größer als ein Jahr ist[1].

Der optimale Ersatzzeitpunkt im ersten MAPI-Modell



Figur 36

Man nimmt also an, daß in dem Zeitraum $\overline{0\ n_1}$ (Figur *36*) noch keine Ersatzanalyse durchgeführt wird[2]; erst danach steigt die jährliche Summe aus Kapitalkosten und Intensitätsnachteil an. Da nur zukünftige Werte des Defenders interessieren, befindet sich der Betrachter, wenn er den Zeitraum $\overline{n_1\ n_{min}}$ erreicht hat, stets im Minimum der zukünftigen Werte.

In diesem Bereich liegt die jährliche Summe aus Intensitätsnachteil und Kapitalkosten ständig unter dem minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil ($V_{d\ min\ Def.}$). Aus diesem Grunde ist der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil des Challengers ($V_{d\ min\ Chall.}$), wenn er unter der erwähnten Kostensumme ($V_j(\overline{n_1\ n_{min}})$) des Defenders liegt, auch kleiner

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.87.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, in: ZfhF Neue Folge 8.Jg. 1956, S.474.
Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual, a.a.O. S.13.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.85.
Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual, a.a.O. S.13.

als der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil des Defenders.

$$V_{d\ min\ Chall.} < V_j(\overline{n_1\ n_{min}}) < V_{d\ min\ Def.} \quad (108)$$

Die Vergleichsgröße des Defenders wird durch die Kostenbetrachtung des nächsten Jahres gewonnen. Stellt sich der Fall ein, daß $V_{d\ min\ Chall.}$ kleiner als die Kostensumme $V_{j\ min}$ des Betrachtungszeitpunktes innerhalb $\overline{n_1\ n_{min}}$ oder sogar kleiner als $V_j(n_1)$ ist, so sollte die Ablösung des Defenders sofort stattfinden. Liegt $V_{d\ min\ Chall.}$ zwischen $V_j(\overline{n_1\ n_{min}})$ des Betrachtungszeitpunktes und dem minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteil des Defenders, so wartet man, bis die Kostensumme $V_j(n)$ über den minimalen Verfahrensnachteil des Challengers steigt, und ersetzt dann. Besteht der Challenger aus einer dem Defender identischen Maschine, so schneidet die Funktion der Kostensumme $V_j(n)$ den Verfahrensnachteil $V_{d\ Def.}$ im Minimum. Auch ohne Betrachtung der vergangenen Größen bleibt n_{min} als optimaler Ersatzzeitpunkt für identische Glieder der Kette bestehen.

c. Der Verfahrensnachteil des Defenders

Die Kapitalkosten des Defenders bestehen aus den Zinsen auf den Restwert und der Restwertminderung, wobei Großreparaturen anteilmäßig verteilt werden. Wie berechnet man nun den Intensitätsnachteil?

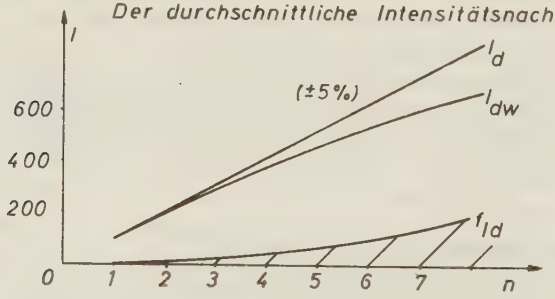
Er ergibt sich als Summe aller ermittelten und geschätzten Kosten- und Ertragsdifferenzen zwischen dem Defender und dem Challenger für das nächste Jahr. Auch nichtmeßbare Vorteile des Challengers, wie Zuverlässigkeit, Flexiblität, Qualitätsverbesserung u.a., sollen möglichst als Betragsdifferenzen bewertet werden[1]. Eine Einzelbewertung enthält gewöhnlich einen kleineren Fehler als eine summarische Bewertung und ist daher vorzuziehen.

[1] Vgl. Terborgh, G.: MAPI Replacement Manual, a.a.O. S.31.

d. Der Verfahrensnachteil des Challengers

Das Minimum des durchschnittlichen Verfahrensnachteils des Challengers kann über eine Tabelle, wie sie im Ersatzmodell von RIFAS auch gezeigt wird, berechnet werden[1]. Man bildet den Durchschnitt der diskontierten kumulierten Summen aus Kapitalkosten und Intensitätsnachteil und vergleicht diesen mit der nächstjährigen Summe von beiden. Sobald die nächstjährige Summe den Durchschnitt zum erstenmal übersteigt, liegt das Minimum des Durchschnittes vor.

G. TERBORGH nennt diese in mehrere Schritte geteilte Berechnung des Minimums für den Challenger zu umständlich für die Praxis[2] und geht daran, eine Kurzmethode zu entwickeln. Da keine Formel existiert, die die kumulativen Rechnungen umgeht, sucht er eine Näherung über die Addition einfacher Durchschnitte der Summanden statt der uniformen jährlichen Äquivalente[3].



Figur 37

Der durchschnittliche Intensitätsnachteil[4] I_{dw} entsteht aus

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a,a.O. S.74ff. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.: Operations Research, a.a.O. S.445.
Die Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes auf analoge Weise wird noch von anderen Autoren durchgeführt:
Vgl. Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Operations Research, (deutsch v. Künzi, H.P.), Würzburg 1962, S.109ff.
Borchard, K.H.: Wirtschaftlichkeitsplanung, Wiesbaden 1962, S.56ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.92.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.93.

[4] Vgl. Orensteen, R.B.: Topics on the MAPI-Formula, in: Journal of Industrial Engineering, Vol. 7 1956, S. 287ff.

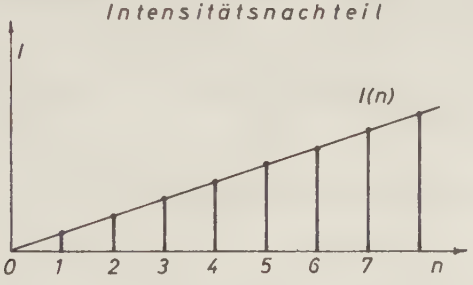
dem Produkt des Barwertes der Intensitätsnachteile der betrachteten Jahre multipliziert mit dem Kapitalwiedergewinnfaktor[1]. Seinen Verlauf als Funktion der Nutzungsdauer n zeigt Figur 37 für einen Zinsfuß von 10% und eine jährliche Intensitätsabnahme von 100 Geldeinheiten.

Der einfache Durchschnitt liegt höher, er wird berechnet[2]:

$$I_d = \frac{g(n - 1)}{2}$$

Man beachte dabei:

1. Der Intensitätsnachteil eines Jahres wird auf das Jahresende zusammengezogen und durch Diskontierung auf den Anfang transformiert[3].
2. Im ersten Jahr existiert kein Intensitätsnachteil, $I_1 = 0$.



Figur 38

Jeder Intensitätsnachteil übersteigt den vorjährigen um den Betrag g, $I_n - I_{n-1} = g$. Der Durchschnitt beträgt[4]:

$$I_d = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n}{n} = g\,\frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)}{n}$$

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.78.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.94.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.94. Smith, V.L.: Investment and Production, Cambridge, Mass. 1961, S.149ff.

[4] Vgl. Dean, B.V.: Replacement Theory, a.a.O., S.334.

Der Zähler wird nach der Summenformel für eine arithmetische Reihe berechnet[1]:

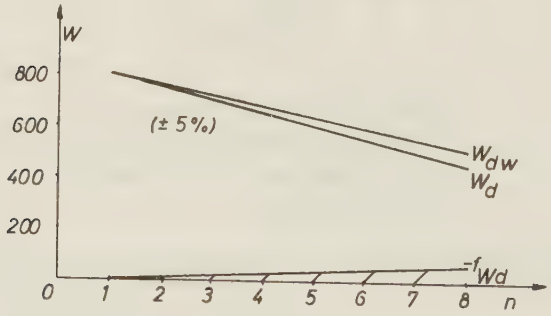
$$s_m = a + a+d + a+2d + \dots + a+(m-1)d = a_1+\dots+a_t$$

$$s_m = \frac{m}{2}(a_1 + a_t) \; ; \quad I_d = g\,\frac{(n-1)(1 + (n-1))}{2n}$$

$$I_d = \frac{g(n-1)}{2}$$

Die durchschnittliche Restwertminderung W_{dw} entsteht aus dem Produkt von Barwert der Restwertminderungen multipliziert mit dem Kapitalwiedergewinnfaktor. In den schrittweise berechneten Beispielen nimmt G. TERBORGH einen degressiv fallenden Verlauf der jährlichen Wertdifferenz an[2]. Figur 39 zeigt die Abweichung eines durchschnittlichen Verlaufes der Restwertminderung W_{dw} als Funktion der Nutzungsdauer von dem nach der Näherungsformel berechneten Verlauf W_d.

Die durchschnittliche Restwertminderung



Figur 39

[1] Vgl. Schülkes Tafeln, Stuttgart 1957, S.36.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.81 und S.84.
Smith, V.L.: Depreciation, Market Valuations, and Investment Theory, in: Management Science, Vol. 9, 1963 Nr. 4, S. 693ff.

$$W_d = \frac{A - R(n)}{n}$$

A = Anschaffungsausgabe
A = 5000 Geldeinheiten
R = Restwert

[1]

Den wirklichen Verlauf zeigt diese Tabelle:

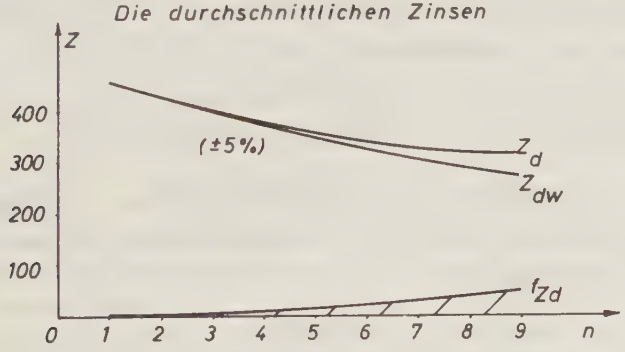
Alter n	=	1	2	3	4	5	6	7	8
Restwert R(n)	=	4200	3500	2900	2400	2000	1700	1500	1400

Die Näherungsformel simuliert einen linearen Wertverlust zwischen Neupreis und Restwert und verursacht dadurch den Verfahrensfehler f_{Wd}.

Auf gleiche Art können auch die durchschnittlichen Zinsverläufe nach genauer Funktion und nach der Näherungsformel

$$Z_d = \frac{i(A + R(n))}{2}$$

verglichen werden[2]. In Figur 40 bedeutet Z_{dw} den wahren durchschnittlichen Zinsverlauf, während Z_d den angenäherten und f_{Zd} die Abweichung darstellt.



Figur 40

Der approximative Wert für den durchschnittlichen Verfahrensnachteil des Challengers $V_{d\ Chall.}$ besteht aus der Summe der angenäherten Einzelglieder:

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.94.
[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.94.

$$V_{d\ Chall.} = I_d + W_d + Z_d$$

(109)

$$V_{d\ Chall.} = g\,\frac{(n-1)}{2} + \frac{A - R(n)}{n} + \frac{i(A + R(n))}{2}$$ [1]

Dies ist die erste MAPI - Formel[2].

e. Die Dimension des durchschnittlichen Verfahrensnachteils

Die Dimension des durchschnittlichen Verfahrensnachteils, $(\frac{DM}{Jahr})$, muß mit den Dimensionen der einzelnen Summanden übereinstimmen. Im ersten Summanden, $I_d = g\,\frac{(n-1)}{2}$, besitzt g die Dimension $(\frac{DM}{Jahr})$, es ist eine jährliche Zuwachsrate; $\frac{(n-1)}{2}$ ist dimensionslos, man kann nicht von einer Dimension - hier könnten n Jahre bedeuten - eine dimensionslose Zahl 1 abziehen. n gibt hier nur die Anzahl der verstrichenen Zeitpunkte an. Den Beweis für diese Behauptung liefert die Entwicklung des Ausdruckes I_d.

$$I_d = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots + I_n}{\text{Anzahl der Intensitätsnachteile}} = g\,\frac{(n-1)}{2}\,(\frac{DM}{Jahr})$$

Die Anzahl der Intensitätsnachteile ist gleich der Zahl der Jahre n, dabei beträgt I_1 null. Also bildet n nur die Summe der Gewichte und ist in diesem Falle dimensionslos.

Im zweiten Summanden, $W_d = \frac{A - R(n)}{n}$, besitzt n dagegen die Dimension Jahre. A und R(n) sind DM-Beträge. W_d ergibt sich also zu $(\frac{DM}{Jahr})$.

Im dritten Summanden, $Z_d = \frac{i(A - R(n))}{2}$, besteht das Produkt aus dem Betrag $\frac{A - R(n)}{2}$ (DM) und dem Zinsfuß i $(\frac{1}{Jahr})$ in Dezimalen. Das Produkt der beiden Dimensionen ergibt $(\frac{DM}{Jahr})$. Die Dimensionen aller Summanden stimmen mit der Dimension der Summe überein.

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.94.

[2] Vgl. Ahlsdorff, M.: Probleme des innerbetrieblichen Transportes, Diss. Göttingen 1965, S.156ff.

3. Die Modellempfindlichkeit gegen Änderungen der Modellelemente

Die Abweichungen der approximierten Werte der Formel von den durchschnittlichen Werten, die durch schrittweises Kumulieren der Beträge berechnet werden, hängen hauptsächlich vom Kalkulationszinsfuß ab. Mit steigendem Zins wachsen sie. Addiert man die Fehler für einen vorgegebenen Zinsfuß, so sinken sie zuerst mit zunehmendem n und steigen dann wieder an. Sie gehören zu der Gruppe der Verfahrensfehler.

Der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil des Challengers kann von der ersten MAPI-Formel ohne weitere vereinfachende Annahmen nicht in einem einzigen Rechenschritt ermittelt werden. Nur für einen besonderen Fall, der den Restwert vernachlässigt und einen stetigen Funktionsverlauf simuliert, erweist sich die erste Ableitung als eine einfache Funktion.

$$\frac{dV_{d\ Chall.}}{dn} = \frac{g}{2} - \frac{A}{n^2} = 0 \qquad n = \frac{2A}{g}$$

Den Ausdruck für n kann man in die Funktion einsetzen und erhält den Ausdruck für die Höhe des Minimums:

$$V_{d\ min\ Chall.} = \sqrt{2Ag} + \frac{iA - g}{2} \qquad (110)$$ [1]

Im allgemeinen Fall enthält die quadratische Gleichung für n, die durch die Differentiation entsteht, auch noch ein Glied mit einem linearen Ausdruck von n; dadurch entsteht ein komplizierter Ausdruck.

$$0 = n^2 - \frac{2R'(n)}{g+iR'(n)}\,n - \frac{2(A - R(n))}{g + iR'(n)}$$

Die Lösung für n ist nicht eindeutig.

$$n_{1,2} = \frac{R'(n)}{g+iR'(n)} \pm \sqrt{\left(\frac{R'(n)}{g+iR'(n)}\right)^2 + \frac{2(A - R(n))}{g + iR'(n)}} \qquad (111)$$

[1] Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.95.

In seinem Handbuch für den Anlagenersatz berechnet G. TERBORGH Kurvenverläufe des minimalen durchschnittlichen Verfahrensnachteils für stetige Verzinsung und stellt daraus ein Diagramm zusammen[1]. Damit begrenzt die optische Ablesemöglichkeit die Genauigkeit auf drei signifikante Ziffern.

Die Größen der Näherungsgleichung müssen bekannt sein oder geschätzt werden können. Die Schätzung der Intensitätsabnahme erfordert eine breite Basis aus Erfahrung und Beobachtung[2], man kann sich jedoch auch an die Intensitätsabnahme des Defenders anlehnen und den gleichen oder einen nahen Wert wählen. Die Ermittlung des Anschaffungswertes bereitet keine Schwierigkeiten, während bei der Festlegung des Restwertverlaufes eine gewisse Unsicherheit erschwerende Bedingungen hervorruft und nur Angaben mit zwei geltenden Ziffern zuläßt. Für die Anwendung des ersten MAPI-Diagramms muß auch die optimale Nutzungsdauer zusätzlich geschätzt werden[3]. Sie besteht aus ganzen positiven Zahlen mit zwei geltenden Ziffern.

$f_{V_{d\ min\ Chall.}}$ symbolisiert die Abweichung des eintretenden durchschnittlichen minimalen Verfahrensnachteils von seinem berechneten Wert. Die Gesamtabweichung ergibt sich als Summe der Einzelabweichungen und dem Verfahrensfehler[4]. Jede Einzelabweichung wird durch das Produkt aus partiellem Differentialquotient und Größenabweichung angenähert.

$$f_{V_{d\ min\ Chall.}} = \frac{dV}{dn} f_n + \frac{dV}{dg} f_g + \frac{dV}{dA} f_A + \frac{dV}{dR(n)} f_{R(n)} + \frac{dV}{di} f_i + \text{Verfahrensfehler}$$

(112)

$$f_{V_{d\ min\ Chall.}} = 0 \cdot f_n + \frac{n-1}{2} f_g + \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{n}\right) f_{R(n)} + \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{n}\right) f_A + \frac{A + R(n)}{2} f_i + \text{Verfahrensfehler}$$

[1] Vgl. Terborgh, G.: MAPI-Replacement Manual, a.a.O. S.71ff. Schindler, H.: Investitionsrechnungen auf der Basis neuer Erkenntnisse, a.a.O. S.478ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.115.

[3] Vgl. Terborgh, G.: MAPI-Replacement Manual, a.a.O. S.47ff.

[4] Definition des Verfahrensfehlers siehe S.20 dieser Untersuchung.

Aus dieser Fehlerbestimmung liest man die Stabilität des Ergebnisses für kleine Größenänderungen ab. Kleine Änderungen der Nutzungsdauer nehmen keinen Einfluß auf das Verlustminimum. Auch die Faktoren vor den Abweichungen des Anschaffungs- und Restwertes besitzen einen so kleinen Wert, daß sie diesen Fehlereinfluß begrenzen. Als beachtenswerte Größe bleiben die Fehler durch die Intensitätsabnahme g, durch den Zinsfuß i und gegebenenfalls der Verfahrensfehler. Der minimale durchschnittliche Verfahrensnachteil verhält sich gegenüber kleinen Abweichungen des Anschaffungswertes, Restwertes und der Nutzungsdauer stabil.

Das Ersatzmodell aus Kostengrößen, "the orthodox engineers formula"[1], wie es von E. SCHNEIDER und RIFAS gezeigt wird, leitet zum ersten MAPI-Modell über, wenn der Grundaufbau erweitert wird.

Zieht man von allen Gliedern der Kostenkette den kleinsten Betrag ab und berücksichtigt außer den zeitlichen Kostensteigerungen auch noch Ertragsschmälerungen, so nähert sich das Ersatzmodell der Form des ersten MAPI-Modells[2].

Das Ergebnis TERBORGHs unterscheidet sich nur wenig von den Ergebnissen der anderen Ersatzmodelle. Hier wie dort bildet die durchgeführte Wahl des besten Challengers mit der Kette der identischen Nachfolger nicht die letzte Wahl einer Kette. Tauchen in der Zukunft neue Challenger auf, die einem Sprung in der technischen Weiterentwicklung entsprechen, so löst eine neue Kette identischer Glieder die vorhandene ab. In dieser Eigenschaft gleichen sich beide Modelltypen. Der Anteil der Veraltung an der Intensitätsabnahme muß erheblich sein, soll der optimale Ersatzzeitpunkt um einen ganzzahligen Betrag in negativer Richtung bewegt werden. Die Aussagekraft erfährt durch die große Unsicherheit bei der Schätzung der zukünftigen Ver-

---

[1] Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.176.

[2] Transformiert man den im Rifasschen Modell durch eine Kettenablösung einmal berücksichtigten technischen Fortschritt als stetig auftretende Größe in die Kostenfolge, so steht man vor dem theoretischen Gerüst TERBORGHs. Eine solche Verbindung der genannten Modelle analytisch zu zeigen, übersteigt den Rahmen der vorliegenden Untersuchung.

altungsrate eine Schwächung, da der durchschnittliche Verfahrensnachteil empfindlich gegen Änderungen von g ist.

Die Lage des optimalen Ersatzzeitpunktes ist gegen geringfügige Änderungen der Kosten und Erträge empfindlicher als gegen Fehler des Kalkulationszinsfußes. Daher wirken sich die Verfahrensfehler, die durch gekürzte Berechnungsmethoden für die Ermittlung des durchschnittlichen Verfahrensnachteils entstehen, wenig beeinträchtigend auf das Ergebnis aus. Erst für große Zinssätze erreichen diese Fehler beachtenswerte Ausmaße. Fehlermildernd wirkt dabei auch der Sachverhalt, daß die Vorzeichen der Fehler der Kapitalkosten ungleich den Vorzeichen der Fehler der Intensitätsabnahme sind.

II. Modelle der Rentabilitätsmaximierung

A. Die Methode des internen Zinsfußes

1. Modellbeschreibung

Wie früher bereits erwähnt wurde, ist als interner Zinsfuß einer Investition der Zinssatz definiert, dessen Verwendung im Diskontfaktor den Barwert aller Ausgaben zum Betrachtungszeitpunkt gleich dem Barwert aller Einnahmen werden läßt.[1] Der Kapitalwert der Investition bei der Berücksichtigung des internen Zinsfußes beträgt null.

$$(e_j\ ,\ a_j \geqq 0)$$

$$e_o + e_1\,(1+r)^{-1} + e_2\,(1+r)^{-2} + \ldots + e_n\,(1+r)^{-n} =$$

$$= a_o + a_1\,(1+r)^{-1} + a_2\,(1+r)^{-2} + \ldots + a_n\,(1+r)^{-n}$$

---

[1] Die Methode des internen Zinsfußes wird in der Literatur an vielen Stellen beschrieben. Vgl. besonders:
Boulding, K.E.: The Theory of a Single Investment, in: Quarterly Journal of Economics Bd. 49 1934/35, S.478ff.
Boulding, K.E.: Time and Investment, in: Economica Vol. III 1936, S.200ff.
Sanderson, G.B.: A Note on the Theory of Investment, in: Economica Vol. VIII 1941, S.178ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.10ff.
Lutz, F. und V.: The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951, S.16ff.
Brandt, H.: Investitionspolitik ..., a.a.O. S.73ff.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in ..., a.a.O. S.55ff.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.43ff.
Albach, H.: Investition und Liquidität, a.a.O. S.27ff.
Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von Investitionen, a.a.O. S.28ff.
Schneider, D.: Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, Köln und Opladen 1961.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, a.a.O. S.11ff.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.55ff.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.34ff.
Knetschke, C.: Die Zinsreagibilität der industriellen Investition, Frankfurt/Main 1963, S.24ff.

Setzt man anstatt $(e_j - a_j)$ für die Differenz d_j ein, so ergibt sich:

$$d_o + d_1(1+r)^{-1} + d_2(1+r)^{-2} + \ldots + d_n(1+r)^{-n} = 0 \qquad (113)$$

r = interner Zinsfuß der betrachteten Investition; jede Investition besitzt einen eigenen internen Zinsfuß.

Da nun das Entscheidungskriterium durch die Maximierung der Rentabilität oder des internen Zinsfußes gegeben ist, wird aus einer Gruppe von Alternativen das Investitionsobjekt mit dem größten internen Zinsfuß ausgewählt. Eine Investition ist vorteilhaft, wenn ihr interner Zinsfuß größer als der Kalkulationszinsfuß ist[1].

Die Aussage des Modells, der interne Zinsfuß, stellt die durchschnittliche Rentabilität der investierten Beträge dar[2].

2. Modellanalyse

a. Die Ermittlung des internen Zinsfußes

Der interne Zinsfuß muß aus einem Polynom n-ten Grades ermittelt werden.

$$\sum_{j=o}^{n} d_j(1 + r)^j = 0$$

Allgemeine Lösungsverfahren für die Werte von r existieren nur in der Form von Näherungsmethoden. Die in der Literatur der

---

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.24.

[2] Vgl. Seelbach, H.: Entscheidungskriterien der Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.307.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.36.

Mathematik genannten Ansätze[1] erfordern in den meisten Fällen ein gewisses Maß an mathematischen Kenntnissen. Es ist daher erforderlich, die einfachsten Verfahren, die den Ansprüchen der Investitionsrechnung genügen, auszuwählen und zu kombinieren.

Eine anwendbare Näherungsmethode wird von K.E. BOULDING gezeigt[2]. Sie enthält folgende Rechenschritte:

Aus den Reihen der Auszahlungen und der Einzahlungen ermittelt man näherungsweise die Zeitzentren t_a und t_e[3].

$$t_a = \frac{a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \quad ; \quad t_e = \frac{e_1 t_1 + e_2 t_2 + \ldots + e_n t_n}{e_1 + e_2 + \ldots + e_n}$$

Die Differenz $t_a - t_e$ wird in folgende Gleichung eingesetzt:

(114)

$$\log (1 + r_1) = \frac{1}{t_a - t_e} (\log E' - \log A')$$

Aus dieser Gleichung wird der erste Näherungswert des internen Zinsfußes r_1 ermittelt. E' besteht aus der Summe aller Einnahmen, A' aus der Summe aller Ausgaben. Mit dem ersten Näherungswert des internen Zinsfußes r_1 ergeben sich die Barwerte der Reihen zu E_1 und A_1.

Zeigt ein Vergleich von E_1 und A_1, daß zwischen ihnen noch eine Differenz besteht, die nicht vernachlässigt werden kann, muß der Wert r_1 verbessert werden. Zu diesem Zwecke bestimmt man bessere Werte der Zeitzentren, t'_e, t'_a, über die Glei-

---

[1] Als Lösungsmethoden für Polynome sind anzuführen: Hornersches-, Newtonsches-, Konvergenzverfahren und Iterationsmethode.
Vgl. u.a. Lense, J.: Vorlesungen über höhere Mathematik, a.a.O. S.63.
Zurmühl, R.: Praktische Mathematik, a.a.O. S.10ff.
Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.123.

[2] Vgl. Boulding, K.E.: Time and Investment, a.a.O. S.199ff.

[3] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.9.

chungen:

$$\frac{E'}{E_1} = (1 + r_1)^{t'_e} \quad ; \quad \frac{A'}{A_1} = (1 + r_1)^{t'_a}$$

Die Differenz der neuen Werte $t'_a - t'_e$ dient zur Ermittlung des zweiten Näherungswertes des internen Zinsfußes r_2 .

$$\log (1 + r_2) = \frac{1}{t'_a - t'_e} (\log E' - \log A') \qquad (115)$$

Bewirkt das Einsetzen des zweiten Näherungswertes des internen Zinsfußes noch nicht die Gleichheit der damit diskontierten Summen der Einzahlungen und Auszahlungen, so wird nochmals verbessert.

Die Näherung von K.E. BOULDING zeigt, daß das Problem aus zwei Teilen besteht, dem Finden der ersten Näherung und dem Verbessern des Näherungswertes.

Das Suchen nach dem ersten Näherungswert kann entweder ohne Rechnung durch Schätzen oder durch Vergleichen mit Werten von Zinseszinstabellen geschehen[1]. Ein anderer einfacher Ansatz soll hier noch entwickelt werden. Die Ausgangsformel für den internen Zinsfuß läßt sich durch eine lineare Näherung stark vereinfachen.

$$\sum_{j=o}^{n} d_j (1 + r)^{-j} = 0$$

$(1+r)^{-j} \longrightarrow (1-jr)$ [2]

$$\sum_{j=o}^{n} d_j (1 - jr) = 0$$

Die lineare Näherung besteht aus den ersten beiden Summanden

[1] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, in: ZfB 35.Jg. 1965, S.768.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung....., a.a.O. S.41.

[2] Die Potenz kann für kleine r durch die ersten beiden Glieder einer binomischen Reihe ersetzt werden.

einer Reihe nach dem binomischen Satz[1]. Die Summe läßt sich nun in zwei Teile zerlegen und nach r auflösen:

$$\sum_{j=o}^{n} d_j(1 - jr) = \sum_{j=o}^{n} d_j - r \cdot \sum_{j=o}^{n} jd_j$$

$$r = \frac{\sum_{j=o}^{n} d_j}{\sum_{j=o}^{n} jd_j} \qquad (116)$$

Aus dieser Formel kann der erste Näherungswert für den internen Zinsfuß schnell bestimmt werden.

Der ermittelte Näherungswert für r fällt zu klein aus, doch liegt er für kleine r nahe an dem wahren Wert; für größere r muß man ihn verbessern. Die Verbesserung des Näherungswertes läßt sich auf graphischem Wege sehr einfach vornehmen, vgl. Figur 41 .

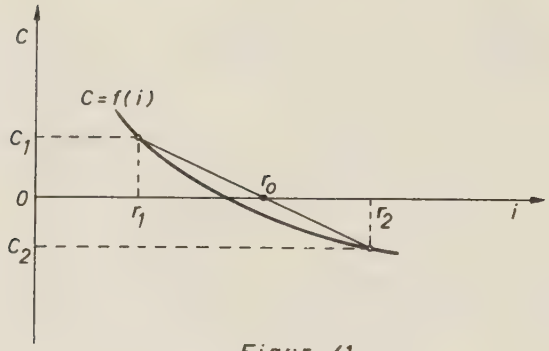
Der erste Näherungswert r_1 wird in die Ausgangsgleichung für den Kapitalwert eingesetzt. Bei sehr grober Näherung ergibt sich ein Wert C_1 für den Kapitalwert, der merklich von null entfernt ist. Man trägt diesen Wert in ein Diagramm ein, in dem der Kapitalwert als Funktion des Zinssatzes verläuft. Ein zweiter Wert r_2 für den internen Zinsfuß wird geschätzt und der Kapitalwert für diesen Zinsfuß C_2 in das Diagramm eingezeichnet. Die gerade Verbindung zwischen den beiden eingezeichneten Punkten oder ihre Verlängerung schneidet die Zinsachse in einem Punkt r_o , der sehr nahe an dem wahren internen Zinsfuß liegt[2].

---

[1] Vgl. Bronstein, I., Semendjajew, K.: Taschenbuch der Mathematik, a.a.O. S.279.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.9.

[2] Eine ähnliche Näherung wird von M. Ahlsdorff gezeigt. Siehe Ahlsdorff, M.: Zum Problem der Differenzinvestition, in: ZfB 34. Jg. 1964, S.449ff.

Graphisches Näherungsverfahren



Figur 41

Die Näherungslösung und das Finden der wahren Lösung durch eine Verbesserung zeigen noch nicht an, ob die gefundene Lösung die einzige ist oder ob noch weitere existieren. Diese Frage läßt sich über die Vorzeichenregel von DESCARTES klären.

Die sogenannte Cartesische Zeichenregel gibt an:

"Die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung ist entweder gleich der Anzahl der Zeichenwechsel oder um eine gerade Zahl geringer." [1]

Einen Zeichenwechsel nennt man den Tatbestand, daß in einer nach Potenzen geordneten Gleichung zwei benachbarte Koeffizienten verschiedene Vorzeichen besitzen[2].

Ein mathematisches Modell als Abbildung einer betrieblichen Investition setzt nicht voraus, daß alle mathematisch möglichen Lösungen des Modells auch für die betriebliche Realität gelten. Es existieren

[1] Schrutka, L.: Elemente der höheren Mathematik, a.a.O. S.541.
[2] Vgl. Schrutka, L.: Elemente der höheren Mathematik, a.a.O. S.541.

genügend Beispiele in der angewandten Mathematik, die aus einer Gruppe mathematisch möglicher Lösungen nur eine einzige auswählen.

Ökonomische Nebenbedingungen schränken den Bereich der mathematisch möglichen Lösungen weitgehend ein und verhindern dadurch in den meisten Fällen, daß mehrdeutige Lösungen auftreten. Die realen internen Zinssätze bilden nur eine kleine Teilmenge der Menge aller Lösungen des mathematischen Modells.

Aus der mathematischen Struktur des Modells ergeben sich regelmäßig für mehrjährige Investitionen auch negative Lösungen. Jeder Wert, der kleiner als -1 ist, kann für unzulässig erklärt werden, "denn mehr als 100% des gebundenen Kapitals kann auch der schlechteste Investor nicht verlieren"[1], (bei Einzelbetrachtung).

Den Rest der negativen internen Zinsfüße, die Werte zwischen null und minus eins, schließt folgende Überlegung, die dem Gedankengang E. SCHNEIDERS folgt[2], aus.

Der interne Zinsfuß besitzt immer dann einen positiven Wert, wenn gleichzeitig das Zeitzentrum der Auszahlungsreihe vor dem Zeitzentrum der Einzahlungsreihe liegt und die Summe aller Einzahlungen größer ist als die Summe aller Auszahlungen[3]. Die Investition muß also dem Typus I angehören[4] und gleichzeitig das Deckungskriterium[5] erfüllen.

Der Typus I kann für die betriebliche Investition gewöhnlich vorausgesetzt werden, denn liegt das Zeitzentrum der Einnahmen vor dem der Ausgaben, so entspricht dieser Tatbestand einer Finanzinvestition[6].

Das Deckungskriterium muß dann erfüllt sein, wenn die Investition nicht mit einem Verlust behaftet sein soll. Eine verlust-

---

[1] Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O. S. 776-777.
[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.13.
[3] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.11.
[4] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.9.
[5] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O.S. 776.
[6] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O.S. 774ff.

behaftete Investition wird nur dann freiwillig durchgeführt, wenn sie mit einer gewinnbringenden in irgendeiner Form gekoppelt ist. Den verlustbringenden Teil dieser Gesamtinvestition isoliert zu betrachten, ohne die sachliche Interdependenz entsprechend zu berücksichtigen, entspricht nicht einer korrekten Investitionsrechnung.

Aus der Menge der mathematisch möglichen Lösungen scheiden somit alle negativen Werte aus; es bleibt die Teilmenge der positiven Lösungen.

Nach der Cartesischen Zeichenregel können bei mehrfachem Vorzeichenwechsel mehrere positive Lösungen auftreten. Wechseln in der Folge der Zahlungsdifferenzen Gewinne und Verluste einander häufig ab, so existieren gegebenenfalls mehrere positive interne Zinsfüße. Kritiker der internen Zinsfußmethode führen diese Tatsache als Argument für die Unbrauchbarkeit des Modells an[1].

Die Existenz mehrfacher Lösungen kann mit Hilfe konstruierter Beispiele durchaus gezeigt werden[2], doch herrscht bei einigen Autoren, z.B. E.SCHNEIDER und K.E. BOULDING, die Meinung vor, daß bei den Investitionen, die praktisch von Wichtigkeit sind, nur ein einziger positiver Zinsfuß existiert[3], also auch nur ein Vorzeichenwechsel vorkommt.

Betrachtet man die in der vielfältigen Literatur über Investitionsrechnungen angeführten Beispiele, so kann man sich der Ansicht anschließen, daß die überwiegende Mehrzahl der realen Investitionen nur einen positiven internen Zinsfuß besitzt. Fast alle angeführten Beispiele behandeln Investitionen, deren

---

[1] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O. S. 766 ff.
(Wright, C.A.: A Note on "Time and Investment", in: Economica Vol. III 1936, S.437ff.
Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von Investitionen, a.a.O. S.90.)

[2] Vgl. Heister, M.: Rentabilitätsanalyse von Investitionen, a.a.O. S.86ff.

[3] Vgl. Boulding, K.E.: "Time and Investment" A Reply, in: Economica Vol. III 1936, S.440ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.13.

Zahlungsfolgen nur einen Vorzeichenwechsel besitzen[1]; M.HEISTER bildet in dieser Beziehung keine Ausnahme. Von seinen knapp 100 Beispielen enthalten nur solche eine Zahlungsfolge mit mehrfach wechselndem Vorzeichen, die die Mehrdeutigkeit der internen Zinsfußmethode demonstrieren sollen.

Für Gewinnverläufe, die als Funktion des Gewinnes im ersten Jahr und der Zeit ausgedrückt werden können, lassen sich einfache Lösungsansätze entwickeln. Betrachtet man eine Investition, die nach einer Anschaffungsausgabe A_o[2] nur konstante Gewinne hervorbringt, so lautet der Ansatz:

(117)

$$0 = -A_o + \sum_{j=1}^{n} d_j(1+r)^{-j} = -A_o + d_1 \sum_{j=1}^{n} (1+r)^{-j}$$

Nur eine positive Lösung existiert für r, denn das Vorzeichen wechselt nur einmal. Durch Addition von A_o auf beiden Seiten der Gleichung und anschließende Division beider Seiten

---

[1] Vgl. Brandt, H.: Investitionspolitik, a.a.O. S.38, 41, 82, 107ff.
Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.32, 40, 43, 89ff.
Terborgh, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik, (deutsch v. Albach, H.) Wiesbaden 1962, S.81ff.
Borchard, K.H.: Wirtschaftlichkeitsplanung, Wiesbaden 1962, S.37ff.
Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O. S.765ff.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.24ff.
Bronner, A.: Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.18ff.
Schneider, H.: Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, a.a.O. S.18ff.
Schneider, H.: Die Grundlagen der Investitionstätigkeit in der betrieblichen Praxis, Diss.München 1957, S.110ff.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, Zürich 1955, S.43ff.
Holler, A.: Die Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer von Anlagen, Münster 1962, S.33ff.

[2] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.14.
Brandt, H.: Investitionspolitik, a.a.O. S.74.

durch d_1 zeigt die rechte Seite eine bekannte Form einer Summe.

$$\frac{A_o}{d_1} = \sum_{j=1}^{n} (1 + r)^{-j} = \frac{1}{1 + r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^n}}{1 - \frac{1}{1 + r}}$$

$$\boxed{\frac{A_o}{d_1} = \frac{1}{r} \left(1 - (1 + r)^{-n} \right)} \qquad (118)$$

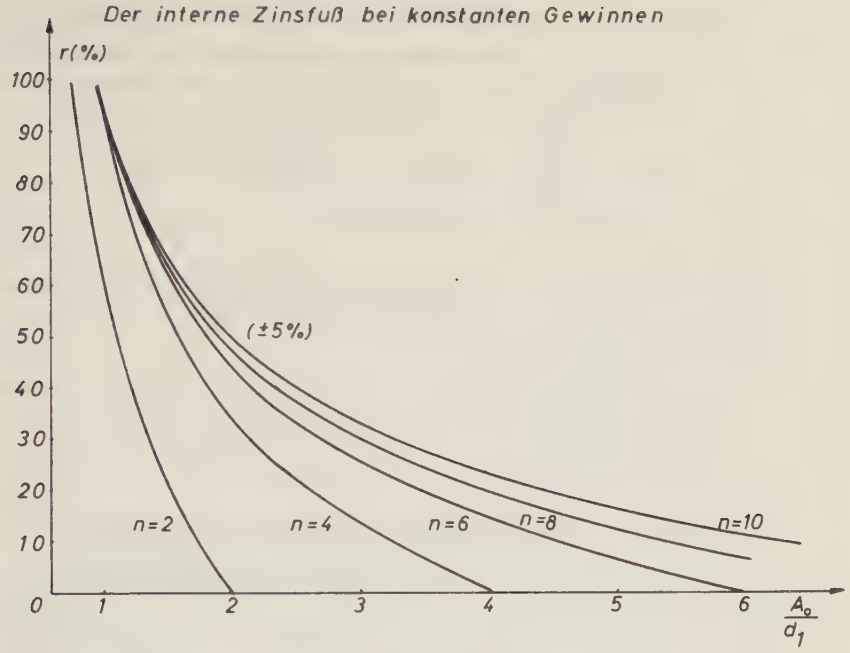
Das Verhältnis von Anschaffungsausgabe zum konstanten jährlichen Gewinn ergibt den reziproken Wert des Wiedergewinnfaktors, der aus dem internen Zinsfuß aufgebaut ist. Diese Werte lassen sich auf einfache Weise für eine Tabelle berechnen und graphisch gegen den Quotienten A_o/d_1 auftragen, vgl. Tabelle 9 und Figur 42 [1].

Tabelle der Quotienten Anschaffungsausgabe : Gewinn

Nutzungsdauer n	Das Verhältnis A_o/d_1 für den internen Zinsfuß						
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0
2	1,86	1,74	1,53	1,36	1,12	0,94	0,75
4	3,54	3,17	2,59	2,17	1,60	1,26	0,94
6	5,08	4,35	3,33	2,64	1,82	1,37	0,98
8	6,46	5,34	3,84	2,92	1,92	1,41	0,99
10	7,72	6,14	4,19	3,09	1,97	1,42	1,00

Tabelle 9

[1] Eine Tabelle der Diskontfaktoren für Zinssätze zwischen 10% und 100% zeigt Anhang 7



Figur 42

Eine Vergrößerung dieses Diagramms erlaubt es, den internen Zinsfuß für eine Investition mit konstanten Gewinnen ziemlich genau zu bestimmen. Aus dieser Darstellung können die Werte des internen Zinsfußes etwa mit der Genauigkeit von $\pm$ 1% abgelesen werden. Die Zeichnungsgenauigkeit beträgt etwa 5%.

Besteht der zeitliche Verlauf der Gewinne aus einer linear fallenden Funktion, die die Zeitachse am Ende der Nutzungsdauer schneidet, so entwickelt sich der Ansatz folgendermaßen:

$$d_j = d_1 \left(1 - \frac{j-1}{n} \right)$$

$$0 = -A_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j (1+r)^{-j} = -A_0 + d_1 \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)(1+r)^{-j}$$

Für dieses Polynom existiert nur eine positive Lösung. Die Summe zerlegt sich in zwei verschiedene Summen; A_o wird auf beiden Seiten addiert und die Gleichung durch d_1 dividiert:

$$\frac{A_o}{d_1} = \sum_{j=1}^{n} (1+r)^{-j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n}(1+r)^{-j}$$

Die linke Summe ist aus dem vorigen Fall bereits bekannt, die rechte Summe bildet ein Korrekturglied, das den linearen Gewinnabfall berücksichtigt.

$$\frac{A_o}{d_1} = \frac{1}{r}(1 - (1+r)^{-n} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (j-1)(1+r)^{-j}$$

Zur Berechnung einer Summenformel für das Korrekturglied schreibt man diese in der Form der aneinandergereihten Summanden und nennt sie S_c.

(119)

$$S_c = (1+r)^{-2} + 2(1+r)^{-3} + 3(1+r)^{-4} + \ldots + (n-1)(1+r)^{-n}$$

Aus dieser Summe formt man $S_c(1+r)^2$ und $S_c(1+r)$ und bildet die Differenz von beiden.

$$S_c(1+r)^2 = 1 + 2(1+r)^{-1} + 3(1+r)^{-2} + \ldots + (n-1)(1+r)^{-n+2}$$

$$S_c(1+r) = (1+r)^{-1} + 2(1+r)^{-2} + \ldots + (n-2)(1+r)^{-n+2} + (n-1)(1+r)^{-n+1}$$

$$S_c(1+r)^2 - S_c(1+r) = 1 + (1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-n+2} - (n-1)(1+r)^{-n+1}$$

Ein Teil der rechten Seiten bildet die bekannte geometrische Reihe:

$$S_c((1+r)^2 - (1+r)) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{n-1}}}{1 - \frac{1}{1+r}} - (n-1)(1+r)^{-n+1}$$

Daraus ergibt sich nach einigen Umformungen und Ausklammerungen:

$$S_c = \frac{1}{r^2}\left(1 - n(1+r)^{-n+1} + (n-1)(1+r)^{-n}\right) \qquad (120)$$

Dieser Ausdruck wird in die Gleichung für den Quotienten $\frac{A_o}{d_1}$ eingesetzt:

$$\frac{A_o}{d_1} = \frac{1}{r}\left(1 - (1+r)^{-n}\right) - \frac{1}{nr^2}\left(1 - n(1+r)^{-n+1} + (n-1)(1+r)^{-n}\right)$$

Die rechte Seite der Gleichung läßt sich noch vereinfachen:

$$\frac{A_o}{d_1} = \frac{1}{r}\left(1-(1+r)^{-n}\right) + \frac{1}{nr^2}\left((nr+1)(1+r)^{-n}-1\right) \qquad (121)$$

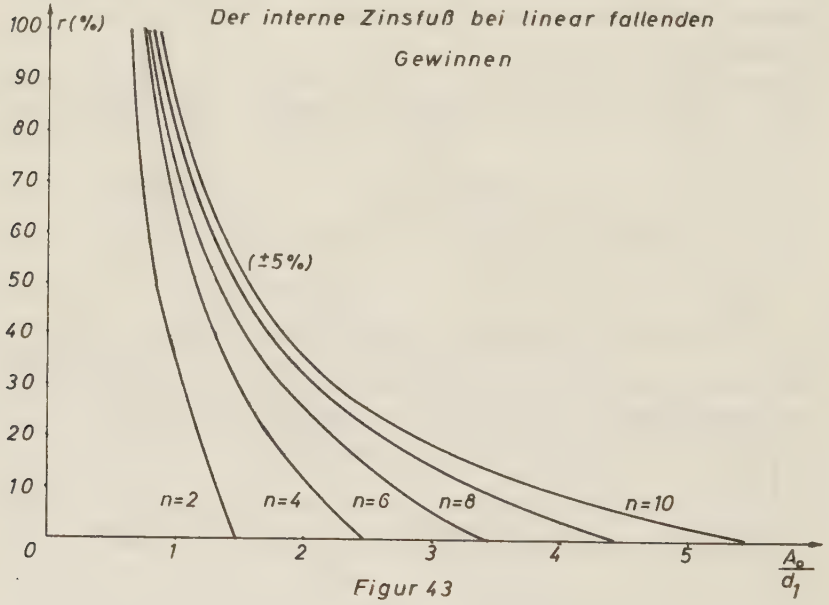
Die nach dieser Formel berechneten Werte des Quotienten $\frac{A_o}{d_1}$ für verschiedene r zeigt die folgende Tabelle 10 .

Nutzungs-dauer n	Das Verhältnis A_o/d_1 für den internen Zinsfuß				
	0,1	0,2	0,5	0,7	1,0
2	1,35	1,17	0,89	0,76	0,62
4	2,12	1,76	1,197	0,98	0,77
6	2,77	2,23	1,39	1,1	0,84
8	3,34	2,61	1,52	1,18	0,88
10	3,86	2,91	1,60	1,22	0,9

Tabelle 10

Figur 43 zeigt den Verlauf des internen Zinsfußes als Funktion des Quotienten aus Anschaffungsausgabe und Gewinn des

ersten Jahres graphisch. Der Verlauf ist dem entsprechenden Verlauf des internen Zinsfußes bei konstanten Gewinnen recht ähnlich. Diese Ähnlichkeit erlaubt den Schluß, daß auch der Verlauf des internen Zinsfußes als Funktion des gleichen Quotienten für degressiv und progressiv fallende Gewinne diese Struktur besitzt.



Figur 43

Große Anlagen benötigen gegebenenfalls mehrere Perioden für die Konstruktionszeit, so daß vor der Folge der Gewinne eine Folge der Verluste liegt. Für die Berechnung des internen Zinsfußes lautet dann die Bestimmungsfunktion:

$$0 = \sum_{j=0}^{m} d_j (1+r)^{-j} + \sum_{j=m+1}^{n} d_j (1+r)^{-j}$$

Die d_j der ersten Summe besitzen negative Werte. Zur Lösung empfehlen sich zwei Möglichkeiten. Entweder zieht man die lin-

ke Summe unter Berücksichtigung eines Kalkulationszinsfußes zusammen und bestimmt danach den internen Zinsfuß[1] oder man geht zu einer überjährigen Verzinsung über. Man wählt die Verzinsungsperiode so lang, wie die Verlustperiode dauert, und berechnet einen überjährigen internen Zinsfuß. Der überjährige interne Zinsfuß läßt sich ohne große Mühe in einen periodengerechten internen Zinsfuß verwandeln.

b. Die Analyse der Modellaussage

Der Vergleich mehrerer Investitionsobjekte gestaltet sich am einfachsten, wenn sie außer den obengenannten Prämissen der Struktur der Zahlungsreihen - Typus I, Erfüllung des Deckungskriteriums und nur ein Vorzeichenwechsel - auch noch die zusätzliche Bedingung erfüllen, daß sie eine gleiche Nutzungsdauer besitzen. Die Auswahl nach dem größten internen Zinsfuß enthält in diesem Falle keine implizit geltende Voraussetzung über die Verwendung der Einzahlungsüberschüsse[2]. Unterschiedliche Nutzungsdauer der verschiedenen Investitionsalternativen bedingen eine Vereinbarung über die Verwendung der Mittel aus den zeitlich kürzeren Vorhaben für die Zeitdifferenz der Betrachtungszeiten.

Die sachliche Isolierung zu allen anderen betrieblichen Zahlungsströmen wird ebenso wie in den Modellen der Gewinnmaximierung vorausgesetzt. Die zeitliche Isolierung kann für die Investitionsobjekte durch die Annahme durchgeführt werden, daß alle Objekte denselben Nachfolger besitzen.

Zur Bestimmung der Vorteilhaftigkeit der Investitionen muß der Kalkulationszinsfuß als Vergleichskriterium herangezogen werden. Bei dem Vergleich mehrerer Investitionen tritt er nicht in Erscheinung, etwaige Schwankungen des Kalkulationszinsfußes üben auf den internen Zinsfuß damit keine Wirkung aus[3].

Das Modell des internen Zinsfußes läßt sich auch zum Investitionsvergleich bei Kapitalwertmaximierung verwenden und führt

---

[1] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O.S.793ff.

[2] Vgl. Kilger, W.: Zur Kritik am internen Zinsfuß, a.a.O.S.793.

[3] Die Aussage gilt nur, wenn in den Modellelementen keine kalkulatorischen Zinsen enthalten sind.

bei korrekter Rechnung zum gleichen Ergebnis wie die Kapitalwertmethode[1].

3. Die Empfindlichkeit des internen Zinsfußes gegen Eingangsfehler

Für die Modelle des internen Zinsfußes besitzt eine Schwankung des Kalkulationszinsfußes außer in ganz bestimmten Sonderfällen keine Wirkung, weil der Kalkulationszinsfuß nicht als Eingangselement auftritt. So wendet sich die Empfindlichkeitsuntersuchung den Einnahmen und Ausgaben zu.

Der besseren Übersicht wegen soll die Definitionsfunktion des internen Zinsfußes noch einmal aufgeführt werden:

$$0 = \sum_{j=o}^{n} d_j (1 + r)^{-j}$$

Um die Schwankung des internen Zinsfußes als Funktion einer kleinen Abweichung eines Gewinnes d_j ausdrücken zu können, multipliziert man den Differentialquotienten $d(1+r)$ nach dd_j mit der Abweichung f_{dj}.

$$f_{(1+r)dj} = \frac{d(1 + r)}{dd_j} f_{dj} \qquad (122)$$

Der Ausdruck für $(1+r)$ als Funktion von d_j und j existiert nur in implizierter Form und kann nicht explizit geschrieben werden, weil ein Polynom höheren Grades vorliegt. Zur Differentiation wählt man einen Umweg.

Man differenziert die Funktion zuerst nach $d(1+r)$ und erhält eine Folge von Summanden. Der reziproke Wert dieser Folge bildet die erste Ableitung $d(1 + r) / dd_j$, weil folgende Bezie-

[1] Vgl. Schneider, E.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.43ff. Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.22ff.

hung gilt[1]:

$$\frac{d(1+r)}{dd_j} = \frac{1}{\frac{dd_j}{d(1+r)}}$$

Bildet man die erste Ableitung für d_o, so erhält man nach dieser Methode:

$$\frac{d(1+r)}{dd_o} = \frac{1}{d_1(1+r)^{-2} + 2d_2(1+r)^{-3} + \ldots + nd_n(1+r)^{-n-1}}$$

Die erste Ableitung nach d_1 besitzt eine ähnliche Form:

$$\frac{d(1+r)}{dd_1} = \frac{1}{-d_o + d_2(1+r)^{-2} + 2d_3(1+r)^{-3} + \ldots + (n-1)d_n(1+r)^{-n}}$$

Aus diesen beiden Ableitungen und noch einigen weiteren läßt sich die Regel für alle diese Ableitungen angeben:

$$\frac{d(1+r)}{dd_j} = \frac{1}{-jd_o(1+r)^{j-1} + (1-j)d_1(1+r)^{j-2} + \ldots + (n-j)d_n(1+r)^{j-n-1}}$$

Den Nenner kann man unter einem Summenzeichen kürzer ausdrükken:

$$\boxed{\frac{d(1+r)}{dd_j} = \frac{1}{\sum_{k=o}^{n} (k-j)d_k \cdot (1+r)^{j-(k+1)}}} \qquad (123)$$

---

[1] Vgl. Schrutka, L.: Elemente der höheren Mathematik, a.a.O. S.108.
Laugwitz, D.: Ingenieurmathematik II, Mannheim 1964, S.38.
Mangoldt, H.v., Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd.2, 11.Aufl. Stuttgart 1958, S.45ff.
Courant, R.; und Robbins, H.: Was ist Mathematik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962, S.326f.

Der Fehler des internen Zinsfußes durch die Abweichung der Eingangsgröße d_j um f_{dj} kann nun dargestellt werden:

$$f_{(1+r)dj} = \frac{f_{dj}}{\sum_{k=o}^{n} (k-j)d_k(1+r)^{j-(k+1)}} \qquad (124)$$

Der Gesamtfehler des internen Zinsfußes durch Abweichungen der Eingangsgrößen besteht aus der Summe der Einzelfehler:

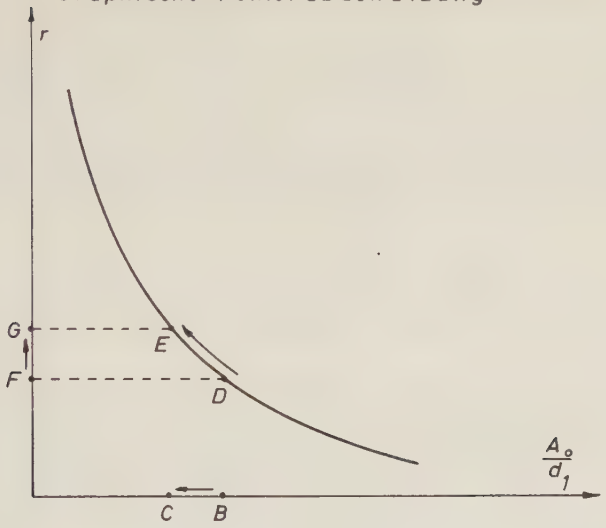
$$f_{(1+r)d} = \sum_{j=o}^{n} \frac{f_{dj}}{\sum_{k=o}^{n} (k-j)d_k(1+r)^{j-(k+1)}} \qquad (125)$$

Die Ermittlung der Fehler über diese komplizierte Funktion ist für die praktische Anwendung zu zeitraubend, man muß daher nach einer Methode suchen, die den Fehler auf einfachere Weise abschätzt.

Für die Gruppe der Verläufe des internen Zinsfußes als Funktion des Quotienten $\frac{A_o}{d_1}$ läßt sich eine graphische Fehlerabschätzung vorschlagen. Nimmt man beispielsweise einen Verlauf aus der Figur *42* und stellt ihn getrennt dar, vgl. Figur *44*, so kann man an ihm die graphische Fehlerermittlung demonstrieren.

Eine Schwankung der Gewinne, die als Funktion des ersten Gewinnes und der Zeit dargestellt ist, pflanzt sich als reziproke Bewegung in den Quotienten $\frac{A_o}{d_1}$ fort. Ändert sich der Quotient von B in C, dann bestimmt Punkt E die interne

Graphische Fehlerabschätzung



Figur 44

Verzinsung, die von F nach G wandert. Die Strecke $\overline{FG}$ mißt die Schwankung des internen Zinsfußes.

B. Die Theorie der minimalen Nutzleistungskosten

Die Theorie der minimalen Nutzleistungskosten, in der englischsprachigen Literatur Unit Cost Theory genannt, wird von J.S. TAYLOR[1] und H. HOTELLING[2] beschrieben. J.S. TAYLOR untersucht den Fall für diskrete Kosten und Erträge, H. HOTELLING benutzt stetige Verläufe. Die Definitionsgleichung für den Fall stetiger Funktionen lautet[3].

$$A_o = \int_o^n (wU(t) - a(t))\exp^{-jt}\, dt + R(n)\exp^{-jn}$$

Die Nutzleistung $U(t)$ der Investition soll mit einem Preis w so bewertet werden, daß der Kapitalwert der Investition den Wert null erreicht. Für jede Nutzungsdauer n ergibt sich ein anderer Preis w der Nutzleistung. Für eine einzelne Maschine ohne Nachfolger wird die Nutzungsdauer für den Fall ermittelt, daß die Nutzleistungskosten minimal sind. Für die geringsten Nutzleistungskosten wird folgende Bedingung erfüllt:

$$w = \frac{a(n) + jR(n) - R'(n)}{U(n)} \qquad (126)$$

Der Quotient auf der rechten Seite der Gleichung stellt einen proportionalen Wert des reziproken Betriebskoeffizienten[4] dar, wenn man den Preis für die Nutzleistung als konstant annimmt.

---

[1] Vgl. Taylor, J.S.: A Statistical Theory of Depreciation, a.a.O. S.1010.

[2] Vgl. Hotelling, H.: A General Mathematical Theory of Depreciation, a.a.O. S.340ff.

[3] Vgl. Hotelling, H.: A General Mathematical Theory of Depreciation, a.a.O. S.343.
Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.67.

[4] Vgl. Pack, L.: Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, a.a.O. S.78.

Der Betriebskoeffizient besteht aus dem Verhältnis Ertrag zu Kosten.

$$B(x) = \frac{E(x)}{A(x)}$$

In diesem Fall müßte x durch die Zeit t ersetzt werden. Da man den Ertrag $E(t)$ aus der Nutzleistung $U(t)$ multipliziert mit dem Preis p erhält, kann man für $U(t)$ auch $E(t)/p$ schreiben.

Die Minimierung der Nutzleistungskosten entspricht der Maximierung des Betriebskoeffizienten und damit der Rentabilitätsmaximierung.

Die Nutzungsdauer der Anlage, die durch das Minimum der Nutzleistungskosten w bestimmt wird, ist kürzer als die optimale Nutzungsdauer bei Gewinnmaximierung, da der Preis p der Nutzleistung allgemein höher als die Nutzleistungskosten liegt. Die Bedingung für die optimale Nutzungsdauer unterscheidet sich in ihrer Form nicht von den Kriterien bei der Goodwillmaximierung. Hier wie dort wird der Durchschnittswert der zu minimierenden Größe mit dem zeitlichen Grenzwert verglichen.
w stellt den Durchschnittswert der Nutzleistungskosten für die vergangene Zeit n dar und der Bruch $\frac{(a(n)+jR(n)-R'(n))}{U(n)}$ die Nutzleistungskosten der nächsten Periode.

PREINREICH ermittelt die optimale Nutzungsdauer sowohl für eine endliche als auch für eine unendliche Kette von Investitionen[1]. Der Ersatz wird zu dem Zeitpunkt durchgeführt, an dem die Nutzleistungskosten der nächsten Periode zum ersten Mal höher sind als die durchschnittlichen Nutzleistungskosten für die gesamte unendliche Kette.

Nach der Fehlerregel für einen Quotienten ergibt sich der relative Fehler ungefähr aus der Summe der relativen Fehler von Zähler und Nenner. Die relativen Fehler der Summen im Zähler und im Nenner liegen zwischen den maximalen und minimalen Werten der relativen Fehler der einzelnen Summanden.

---

[1] Vgl. Preinreich, G.A.D.: The Economic Life of Industrial Equipment, in: Econometrica Vol. 8 1940, S.14ff.

Als Ausgangsgleichung zur Fehlerrechnung bietet sich die unstetige Form des Modells an, weil bei numerischer Rechnung mit Nutzleistungskosten ebenfalls diese Form der Rechnung benutzt wird[1]. Die Integrale gehen in Summen über und die stetige Verzinsung wird durch Zinseszinsen ersetzt. Die Ausgangsgleichung lautet:

$$w = \frac{\sum_{j=o}^{n} a_j q^{-j} + A_o - R_n q^{-n}}{\sum_{j=o}^{n} U_j q^{-j}} = \frac{X}{Y}$$

Die relativen Fehler des Zählers X und des Nenners Y werden getrennt ermittelt und addiert:

$$f_{rw} = \left| \frac{\sum_{j=o}^{n} \frac{\delta X}{\delta a_j} f_{aj} + \frac{\delta X}{\delta A_o} f_{Ao} - \frac{\delta X}{\delta R_n} f_{Rn} + \frac{\delta X}{\delta i} f_i}{\sum_{j=o}^{n} a_j q^{-j} + A_o - R_n q^{-n}} + \frac{\sum_{j=o}^{n} \frac{\delta Y}{\delta U_j} f_{Uj} + \frac{\delta Y}{\delta i} f_i}{\sum_{j=o}^{n} U_j q^{-j}} \right|$$

Nach der Ausführung der Differentiation nach allen Eingangsgrößen beträgt der relative Fehler der Nutzleistungskosten:

$$f_{rw} \approx \left| \frac{\sum_{j=o}^{n} q^{-j} f_{aj} + f_{Ao} - q^{-n} f_{Rn} - \left(\sum_{j=o}^{n} j a_j q^{-j-1} - n R_n q^{-n-1} \right) f_i}{\sum_{j=o}^{n} a_j q^{-j} + A_o - R_n q^{-n}} + \frac{\sum_{j=o}^{n} q^{-j} f_{Uj} - \left(\sum_{j=o}^{n} U_j j q^{-j-1} \right) f_i}{\sum_{j=o}^{n} U_j q^{-j}} \right|$$

[1] Vgl. Briel, H.v.: Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, a.a.O. S.68ff.

Wie aus der Fehlerabschätzung zu entnehmen ist, wirken Zinsabweichungen sowohl auf die Kosten im Zähler als auch auf die Nutzleistung im Nenner ein. Ihre Auswirkungen auf das Modellergebnis, den durchschnittlichen Preis w, werden dadurch, daß beide Komponenten entgegengesetzt auftreten, stark gemindert. Eine Restwertabweichung zeigt sich mit dem kleinsten Diskontfaktor gewichtet als geringere Größe im Gesamtfehler. Den stärksten Einfluß nehmen die Abweichungen der Nutzleistungen und Kosten, die in der nahen Zukunft anfallen, unter ihnen auch der Anschaffungswert A_o. Die Wirkung der zeitlich weiter entfernt eintreffenden Beträge der Nutzleistungen und Kosten wird durch die Diskontierung gemildert.

Eine Verschiebung des optimalen Ersatzzeitpunktes kann durch die Fehlerabschätzung nicht gemessen werden, da dieser Punkt nicht als bestimmte Gleichung auftritt, sondern nur seine Nebenbedingung existiert.

C. Das Modell der zweiten MAPI - Methode

1. Die Beschreibung des Modells

a. Der Begriff relative Rentabilität

Etwa zehn Jahre nach der Veröffentlichung der ersten MAPI-Methode entwickelte G. TERBORGH ein neues Modell, das nicht mehr die Gewinnmaximierung als Entscheidungskriterium nimmt, sondern den Ersatz mit Hilfe der "relativen Rentabilität"[1] ermittelt. Die relative Rentabilität r_r wird definiert durch die Gleichung[2]:

$$r_r = \frac{d_r + V_a - V_n - St}{A_{on}} \qquad (127)$$

r_r = relative Rentabilität
d_r = laufender Betriebsgewinn des nächsten Jahres
V_a = vermiedener Kapitalverzehr des nächsten Jahres
V_n = entstehender Kapitalverzehr des nächsten Jahres
St = Ertragsteuern im nächsten Jahr.
A_{on} = Nettoinvestitionsausgaben

Wie schon in seinem ersten Modell führt G. TERBORGH neue und teilweise ungebräuchliche Begriffe ein. Bevor man die Aussage

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.39ff.
Terborgh, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik, übersetzt von Albach, H., Wiesbaden 1962, S.72ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.62.
Terborgh, G.: Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik, a.a.O. S.101.
Terborgh, G.: Identification and Solution of Nonformula Problems, A MAPI Research Study, Washington 1960, S.8ff.
Terborgh, G.: The Required Return from Investment Projects (Studies in Business Investment Strategy 4), A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963.
Buffa, E.S.: Models for Production and Operations Management, a.a.O. S.391.

des Modells diskutieren kann[1], müssen deshalb die Begriffe näher erläutert und gegebenenfalls in Formulierungen der Investitionsrechnung dargestellt werden.

Die Betrachtung der Methode erstreckt sich auf das nächste Jahr, wodurch das Modell von allen betrachteten Modellen abzuweichen scheint, doch sind in die Rechengrößen die Veränderungen der folgenden Jahre projeziert.

Unter den Nettoinvestitionsausgaben versteht man die Anschaffungsausgabe für das neue Investitionsobjekt vermindert um den Restwert der zu ersetzenden Anlage und um die vermiedenen Ausgaben für Großreparaturen am alten Objekt. Der laufende Betriebsgewinn des nächsten Jahres besteht aus den Ertrags- und Kostenänderungen, die durch die Vornahme des Ersatzes hervorgerufen werden. Der vermiedene Kapitalverzehr wäre am alten Objekt durch die Nutzung im nächsten Jahr aufgetreten, wenn nicht ersetzt würde. Der Wertverlust des Ersatzobjektes im nächsten Jahr, seinem ersten Nutzungsjahr, heißt entstehender Kapitalverzehr des nächsten Jahres. Er ergibt sich als Differenz zwischen dem Anschaffungswert und dem Nutzungswert am Ende des ersten Jahres[2].

Alle Elemente der Definitionsfunktion für die relative Rentabilität entstehen durch den Vergleich der beiden Alternativen. Der laufende Betriebsgewinn stellt einen relativen Einzahlungsüberschuß dar. Man erhält ihn, wenn man von dem Einzahlungsüberschuß für den Einsatz der Ersatzanlage während der nächsten Periode den Einzahlungsüberschuß für die Nutzung der be-

---

[1] Die Darstellung Terborghs hat in Deutschland ein lebhaftes Echo gefunden.
Vgl. Schindler, H.: Investitionsrechnungen in...., a.a.O. S.219ff.
Albach, H.: Investitionspolitik in Theorie und Praxis, in: ZfB 1958, S.766ff.
Albach, H.: Die Berechnung der Wirtschaftlichkeit betrieblicher Investitionen, in: ZfB 29.Jg.1959, S.419ff.
Zimmermann, W.: Das MAPI-Verfahren, eine Methode zur Analyse der Wirtschaftlichkeit von Investitionsvorhaben, in: ZfR 1965, Nr.2 und 3, S.40ff und 57ff.
Investitionsrechnung (II), o.V. in: Kostenrechnungspraxis 1964, S.140f.
Böckmann, W.: Investitionsrechnungen, a.a.O. S.144ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.60f.

stehenden Anlage während der gleichen Periode abzieht[1]. Für jedes Nutzungsjahr der bestehenden Anlage kann ein solcher Vergleich mit den Werten des ersten Jahres der Ersatzanlage durchgeführt werden.

$$d_{rj} = d_{n1} - d_{aj} = e_{n1} - a_{n1} - (e_{aj} - a_{aj})$$

d_{rj} = relativer Einnahmenüberschuß für den Einsatz der Ersatzanlage in der Nutzungsperiode j der bestehenden Anlage.

d_{n1} = Einnahmenüberschuß der Ersatzanlage im ersten Nutzungsjahr ohne Zinsen auf den Anschaffungswert, ohne Wertminderung und ohne Steuerabzug.

d_{aj} = Einnahmenüberschuß der bestehenden Anlage im Nutzungsjahr j, dem betrachteten Jahr, ohne Zinsen auf den Restwert, ohne Restwertminderung und ohne Steuerabzug.

Da in dem laufenden Betriebsgewinn die Differenz der Restwertminderungen und die Steuerdifferenz durch den Ersatz noch nicht berücksichtigt sind, werden sie einzeln addiert. Die Ermittlung des relativen Einnahmenüberschusses bringt keine neuen Gesichtspunkte[2]. Der Begriff und die Ermittlung des Kapitalverzehrs zeigt einen neuartigen Gedankengang auf.

b. Der Begriff und die Ermittlung des Kapitalverzehrs

Die absoluten Gewinne des Ersatzobjektes werden in dem Modell mit einem Zinssatz in der Weise auf den Einsatzzeitpunkt diskontiert, daß ihre Summe den Anschaffungswert ergibt[3]. Der

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.39.

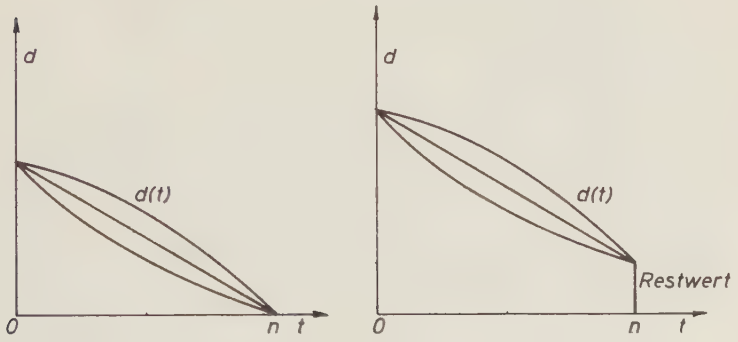
[2] Die Ermittlung des relativen Einnahmenüberschusses wird von Terborgh mit Hilfe seines MAPI-Formulares eingehend erklärt. Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.90ff.
Terborgh, G.: Screening Alternative Investment Projects, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1960, S.10ff.
Terborgh, G.: Effect of Anticipated Inflation on Investment Analysis, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1960, S.14ff.
Terborgh, G.: Lease-Purchase Alternatives, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961, S.10ff.
Terborgh, G.: Analysis of "Front-Office" Projects, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961, S.19ff.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.215.

Diskontfaktor enthält also den internen Zinsfuß[1]. Die Minderung des Barwertes der zukünftigen Gewinne durch die Nutzung im ersten Jahr des Einsatzes stellt den Kapitalverzehr der neuen Anlage in diesem Jahr dar.

Um den Kapitalverzehr berechnen zu können, muß man entweder die zukünftigen Gewinne kennen oder ihnen einen bestimmten Verlauf unterstellen. G. TERBORGH setzt drei Verläufe als möglich voraus[2], einen zeitlich linear fallenden, einen zeitlich degressiv fallenden und einen zeitlich progressiv fallenden, und nimmt am Ende der Nutzungsdauer vereinfachend an, daß der Restnutzungswert gleich dem Restwert der Anlage sei.

Gewinnverläufe ohne und mit Restwert



Figur 45

Um trotz der vereinfachenden Annahmen für Gewinnverlauf und Nutzungsdauer einen möglichst genauen Wert des Kapitalverzehrs ermitteln zu können, bezieht G. TERBORGH Steuern, steuerliche Abschreibungsmethode, Verschuldungsgrad, Fremdkapitalzinssatz und Eigenkapitalrentabilität in seine Rechnung ein und stellt aus diesen Größen die MAPI-Formeln auf. Die

---

[1] Vgl. Albach, H.: Investitionspolitik in Theorie und Praxis, a.a.O. S.777.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.72. Terborgh, G.: Front-Office Responsibilities in Project Analysis (Studies in Business Investment Strategy 3) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963, S.16.

MAPI-Formeln sind wegen ihrer Länge und Kompliziertheit für eine Interpretation nicht geeignet, doch erlaubt die Darstellung ihrer Entwicklung[1] einen Einblick in den Gedankengang G. TERBORGHs.

Die Ableitung der einfachsten MAPI-Formeln soll nun dargestellt werden, indem die Symbolik der klassischen Investitionsrechnung angepaßt wird.

V_n = Kapitalvermehr der Anlage
R_j = Restwert am Ende des Jahres j . $(j = 1, 2, \ldots)$
r = interner Zinsfuß nach der Berücksichtigung der Steuern für die Einzahlungsüberschüsse
y = Fremdkapitalzinsfuß
b = Ertragsteuersatz (Dezimalbruch)
d = Überschuß der Einnahmen über die Ausgaben
K_e = Eigenkapital
K_f = Fremdkapital
K = Gesamtkapital
z = Rentabilität des Eigenkapitals nach Steuerabzug
St = Steuerbetrag
p = Verhältnis von Fremdkapital zu Gesamtkapital

Die Rentabilität oder Verzinsung des eingesetzten Kapitals berechnet sich für ein Jahr zu:

$$r = \frac{d - St + yK_f}{K} = y\frac{K_f}{K} + \frac{d - St}{K} = \frac{yK_f}{K} + \frac{(d - St)K_e}{K_e K}$$

Setzt man für das Verhältnis von Fremd- zu Gesamtkapital das Symbol p ein, so erhält man die Formel G. TERBORGHs[2].

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.221ff.
Terborgh, G.: Selection of the Analytical System (Studies in Business Investment Strategy 2) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963.
Terborgh, G.: Administration of Investment Policy (Studies in Business Investment Strategy 1) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.222.

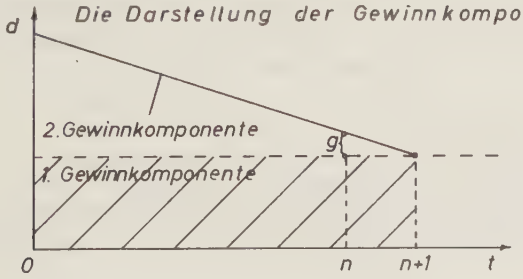
$$r = py + z(1 - p) \qquad (128)$$

Aus dieser Formel kann ohne Schwierigkeiten auch ein interner Zinsfuß r' ermittelt werden, der auf den Gewinnen vor Steuerabzug aufgebaut ist.

$$r' = \frac{d + yK_f}{K} = py + \frac{d}{K} = py + \frac{d(1 - p)}{K_e}$$

$$r' = py + \frac{z(1 - p)}{1 - b} \qquad (129)^1$$

Von den drei Gewinnverläufen sei nur der linear fallende herausgegriffen. Die jährlichen Gewinne sieht G. TERBORGH als aus zwei Komponenten aufgebaut. Die erste Komponente besteht aus den Kapitalkosten des Objektes, wenn es nach Ablauf seiner Nutzungsdauer noch ein Jahr genutzt würde[2]. Da sowohl der Restwert der Anlage als auch die jährlichen Rohgewinne monoton sinken, stellt dieser Betrag den kleinsten Kapitalkostenbetrag für das betrachtete Objekt dar und kann so angesehen werden, als ob es in jedem Betrag der jährlichen Kapitalkosten enthalten ist, vgl. Figur 46 .



Figur 46

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.223.
[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.223.

Die zweite Komponente besteht aus den Überschüssen der Rohgewinne über die erste Komponente und wird mit Hilfe des letzten Rohgewinnes d berechnet. Die Restwertminderung im Jahre n+1 wird bei G. TERBORGH durch $A_o w^n(1-w)$ ausgedrückt; sie ergibt sich auf folgendem Wege:

$$R_n - R_{n+1} = R_n\left(1 - \frac{R_{n+1}}{R_n}\right)$$

Für das Verhältnis der beiden Restwerte wird das Symbol w gewählt.

$$R_n - R_{n+1} = \frac{A_o R_n}{A_o}(1 - w)$$

$$\boxed{R_n - R_{n+1} = A_o w^n (1 - w)} \qquad (130)$$

Die Substitution w^n für R_n/A_o bedeutet, daß für die gesamte Folge von Restwerten angenommen wird, daß das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Restwerte konstant ist, $R_j/R_{j-1} = w$.[1]

Außer der Restwertminderung bildet noch die Verzinsung des Restwertes R_n für ein Jahr einen Bestandteil der Kapitalkosten des Jahres n+1. Als Zinsfuß wird der interne Zinsfuß r' vor Steuerabzug gewählt, weil die Steuern später berücksichtigt werden. Die Zinsen im Jahr n+1 betragen[2]:

$$\boxed{r'(R_n) = \left(yp + \frac{z(1-p)}{1-b}\right)A_o w^n} \qquad (131)$$

Aus der Summe von Restwertminderung und Kapitalkosten für das Jahr n+1 ergibt sich die erste Komponente der Rohgewinne zu:

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.222.
[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.223.

$$R_o w^n \left(1 - w + py + \frac{(1-p)z}{1-b}\right) = R_n \frac{d + yK_f}{K} + R_n - R_{n+1} \qquad (132)$$

Die Form der zweiten Komponente richtet sich nach dem unterstellten Gewinnverlauf. Der Standardverlauf unterstellt eine lineare Gewinnabnahme mit der konstanten Abnahmerate g in der Weise, daß die zweite Komponente im $n+1$-sten Jahr null beträgt. Im ersten Jahr beträgt sie ng (vgl. Figur 46). Im Jahre j beträgt die zweite Komponente $(n-j+1)g$. Der Rohgewinn d_j im Jahre j beträgt unter Berücksichtigung der TERBORGHschen Schreibweise:

$$d_j = (n-j+1)g + A_o w^n \left(1 - w + py + \frac{(1-p)z}{1-b}\right) \qquad (133)$$

In der herkömmlichen Schreibweise der Investitionsliteratur sieht der gleiche Ausdruck etwas anders aus:

$$d_j = R_n \frac{d + yK_f}{K} + (R_n - R_{n+1}) + (n-j+1)g \qquad (134)$$

In der weiteren Entwicklung der Berechnung des Kapitalverzehrs im ersten Nutzungsjahr werden die Steuern berücksichtigt. Die Gewinne nach Steuerabzug ergeben sich aus den Gewinnen vor Steuerabzug nach dem Ausdruck[1]:

$$d_{st} = d - b\,(d - d_{sf})$$

Der Gewinn nach Steuerabzug ergibt sich als Differenz von Rohgewinn minus Steuersatz multipliziert mit dem steuerpflichtigen Anteil des Rohgewinns.

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.223. Schiff, E.: The Econometrics of Three Investment Incentives, unveröffentlichtes Manuskript. (Dr.Eric Schiff ist wissenschaftlicher Mitarbeiter Terborghs im Machinery and Allied Products Institute, Washington)

d_{st} = Gewinn nach Steuerabzug
d = Gewinn vor Steuerabzug
b = Steuersatz
d_{sf} = Anteil des Gewinns, der nicht versteuert wird.

Die Formel für die Gewinne nach Steuerabzug läßt sich so aufteilen, daß der Steuerfreibetrag für sich steht.

$$d_{st} = (1 - b)d + bd_{sf}$$

Auf die Reihe der Rohgewinne angewendet, formt diese Steuerbeziehung den Ausdruck um. Man erhält als Ergebnis die jährlichen Gewinne nach Steuerabzug unter Berücksichtigung der Aufteilung in die beiden beschriebenen Komponenten. Der jährliche Abschreibungsbetrag und der Anteil der Fremdkapitalzinsen bilden den jährlichen steuerfreien Betrag. Unterstellt man einen linearen Verlauf, so besitzt der jährliche Abschreibungsbetrag die Größe $\frac{A_o - R_n}{n}$. Die Zinsen für den Anteil des Fremdkapitals, das noch im Restwert gebunden ist, betragen $\frac{R_{j-1} K_f y}{K}$.

Diese Unterteilung der jährlichen Gewinne verdient besondere Beachtung, weil in dem Modell durch diesen Ansatz sowohl die Minderung des Nutzungswertes des Objektes berücksichtigt wird, als auch der Einfluß der buchhalterischen Abschreibung über die Steuern zum Tragen kommt. Als Steuerfreibetrag d_{sfj} im Jahre j summieren sich die Zinsen für das Fremdkapital und die buchhaltungsmäßigen Abschreibungen zu:

$$d_{sfj} = \frac{A_o - R_n}{n} + \frac{yR_j K_f}{K} \qquad (135)$$

Die Gewinne nach Steuerabzug können nun durch Einsetzen der Steuerformel in den Ausdruck für die jährlichen Rohgewinne unter Berücksichtigung des Steuerfreibetrages gefunden wer-

den. Sie lauten bei G. TERBORGH[1]:

$$d_{stj} = (1-b)(ng + PA_o) + \frac{bA_o(1-w^n)}{n(n+1)}(n-j+1) + bpyA_o \qquad (136)$$

Darin bedeutet $P = w^n(1-w+py + \frac{(1-p)z}{1-b})$.

Als Funktion der Ausgangsgrößen geschrieben besitzt dieser Ausdruck die folgende Form:

$$d_{stj} = (1-b)(R_n\frac{d+yK_f}{K} + R_n - R_{n+1} + (n-j+1)g) + b(\frac{A_o-R_n}{n} + \frac{yK_fR_j}{K}) \qquad (137)$$

Soweit liegen für die Ermittlung von $R_j - R_{j+1}$, bzw. den Spezialfall hiervon $A_o - R_1$, n Gleichungen vor, die noch n+1 Unbekannte enthalten. Die Anzahl der Gleichungen beträgt n , weil der Gewinn nach Steuerabzug d_{stj} für jedes j von 1 bis n ermittelt werden muß.

Die Anzahl der Unbekannten beträgt n+1 , weil außer den Restwerten $R_1 \ldots\ldots R_n$ auch noch g unbekannt ist. Das Gleichungssystem läßt sich dadurch für den gesuchten Wert R_1 lösen, weil die R_j mit dem davorliegenden Wert noch über eine andere Beziehung verbunden sind[2]:

$$R_{j-1} = \frac{(R_j + d_{stj})}{1 + r}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems erfolgt nun zweckmäßigerweise in einzelnen Rechenschritten vom Liquidationswert R_n angefangen in Richtung auf den ersten Restwert R_1. Die Differenz zwischen A_o und R_1 zeigt den Kapitalverzehr der Ersatzanlage im ersten Jahr der Nutzung.

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.225.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.225.

$$V_n = \frac{n(Q^n-w^n)(Q-1)^2 - ((1-b)p+b(1-w^n)/n)(Q^n-1-n(Q-1))}{nQ^n(Q-1)-(Q^n-1)} - (Q-) \quad (138)$$

Der Ausdruck Q besteht aus der Zusammenfassung von $1 + r - bpy$.

Diese mathematische Beziehung für V_n heißt die MAPI - Formel.

Für andere Abschreibungsarten und andere Gewinnverläufe existieren ähnlich komplizierte Formeln für den Kapitalverzehr im ersten Jahr. Sie alle geben den Kapitalverzehr als Bruchteil des Anschaffungswertes an. Für sechs verschiedene Kombinationen von Abschreibungsart und Gewinnverlauf zeigen die MAPI-Diagramme den Kapitalverzehr als Funktion der Nutzungsdauer graphisch[1]. Dafür wurden noch einige Elemente der Formel festgelegt[2].

$$b = 0,50$$
$$p = 0,25$$
$$y = 0,03$$
$$z = 0,10$$
$$r = 0,0825$$
$$P = w^n(1,1575 - w)$$
$$Q = 1,07875$$

Zur Ermittlung des Kapitalverzehrs der alten Anlage führt G. TERBORGH keine Rechenverfahren an, sondern hält eine vernünftige Schätzung für genügend[3].

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Common Nonformula Problems, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961, S.8, 31ff.
Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.121ff.
Terborgh, G.: Identification and Solution of Nonformula Problems, a.a.O. S.26ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.232.

[3] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.108.

2. Modellaussage und Modellanalyse

Das Ergebnis des zweiten MAPI-Modells besteht aus einer relativen Rentabilität, die durch den Vergleich einer bestehenden Anlage und einem entsprechenden Ersatzobjekt ermittelt wurde. Diese relative Rentabilität zeigt die Verzinsung des durch den Ersatz zusätzlich gebundenen Betrages für das nächste Jahr. Mit Hilfe der relativen Rentabilität soll dem Unternehmer die Möglichkeit gegeben werden, für den Ersatz von Anlagen eine Rangordnung der Dringlichkeit aufzustellen[1]. Je höher die relative Rentabilität umso dringlicher ist es, den Ersatz der Anlage durchzuführen.

Die absolute Rentabilität kann aus dem MAPI-Modell nicht abgelesen werden, eine hohe relative Rentabilität deutet nicht unbedingt auf einen großen Gewinn hin. Nach G. TERBORGH fällt der optimale Ersatzzeitpunkt mit der geringsten relativen Rentabilität zusammen[2]. Diese Aussage kann nur gelten, wenn die bestehende Anlage schon ein gewisses Alter erreicht hat und die relative Rentabilität in Zukunft weiter ansteigen wird. Die möglichen Fälle sollen kurz untersucht werden. Die relative Rentabilität

$$r_r = \frac{d_r + V_a - V_n - St}{A_{on}}$$

kann je nach den Vorzeichen der Summe im Zähler oder der Nettoinvestitionsausgabe sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Da nur betriebliche Investitionen untersucht werden, kann eine Anzahl der mathematisch möglichen Lösungen als nicht relevant ausgeschaltet werden.

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Administration of Investment Policy (Studies in Business Investment Strategy 1) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963, S.18.
Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.199ff.
Terborgh, G.: Control of Capital Employed (Studies in Business Investment Strategy 5) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963, S.19.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.56.

Der Nenner soll in allen Fällen als positiv vorausgesetzt werden, weil sonst der Liquidationswert der alten Anlage höher sein müßte als der Anschaffungswert und die Aufstellkosten der Ersatzanlage. Der vermiedene und der entstehende Kapitalverzehr des nächsten Jahres sollen jeder einen positiven Betrag ausmachen; damit wird ein Wertzuwachs während der Anlagennutzung ausgeschlossen. Die Steuern werden mit dem laufenden Betriebsgewinn zu der Größe d'_r zusammengezogen. Im Geltungsbereich der beiden Prämissen nimmt die relative Rentabilität für folgende Fälle positive Werte an:

1. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r > 0$; $V_a < V_n$; $d'_r > V_n - V_a$;

Die Durchführung des Ersatzes bringt eine positive Verzinsung der Nettoinvestitionsausgaben, wenn der laufende Betriebsgewinn nach Abzug der Steuerdifferenz noch den durch die Ersatzanlage verursachten höheren Wertverlust übersteigt. Diese Datenkonstellation beschreibt einen Tatbestand, wie er ähnlich auch beim Ersatzzeitpunkt in anderen Ersatzmodellen auftritt.

2. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r > 0$; $V_a > V_n$;

Übersteigen die Wertminderungen der alten Anlage im nächsten Jahr die der neuen Anlage, so addieren sie sich noch zu dem steuerbereinigten laufenden Betriebsgewinn und erhöhen die relative Rentabilität. Ein solcher Fall kann durch eine plötzlich auftretende technische Überholung ausgelöst werden, also wenn eine entscheidende Verbesserung auftritt.

3. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r < 0$; $V_a > V_n$; $V_a - V_n > |d'_r|$;

In diesem Fall wird die positive Rentabilität nur durch eine Differenz zwischen dem Kapitalverzehr der alten und dem Kapitalverzehr der neuen Anlage hervorgerufen, denn der entstehende Betriebsgewinn ist negativ. Hier wird der Ersatz nur durch die Veraltung oder durch einen großen Verschleiß bewirkt.

Diesen drei Möglichkeiten für eine positive relative Rentabilität stehen drei Fälle gegenüber, die unter Einhaltung

der obenangegebenen Prämissen eine negative Rentabilität ergeben.

4. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r > 0$; $V_n > V_a + d'_r$;

Eine negative relative Rentabilität wird durch den großen Wertverlust der Ersatzanlage im ersten Nutzungsjahr hervorgerufen. Dieser Fall ist denkbar, wenn eine Ersatzanlage mit einer Anlage im Betrieb verglichen wird, die noch nicht alt ist. Vom Ersatz wird zu diesem Zeitpunkt abgeraten. Erst später wird d'_r so weit ansteigen, daß der Ersatz vorgenommen werden sollte, weil der Zähler einen positiven Wert erreicht.

5. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r < 0$; $V_n > V_a$;

Die negative Rentabilität wird durch relative Verluste und erhöhten Kapitalverzehr verursacht. Der Ersatz sollte nicht durchgeführt werden.

6. Fall: $A_{on} > 0$; $d'_r < 0$; $V_n < V_a$; $V_a - V_n < d'_r$;

Der Kapitalverzehr der neuen Anlage ist zwar geringer als der der alten, doch sinkt der Gewinn nach dem Ersatz so weit, daß die relative Rentabilität einen negativen Wert erreicht.

7. Fall: $A_{on} < 0$; Zähler ist positiv;

Ein Sonderfall, der nicht die geforderten Prämissen erfüllt, soll noch erwähnt werden, weil er auch bei G. TERBORGH genannt[1] wird. Der Zähler besitzt einen positiven Wert, trotzdem ist die relative Rentabilität negativ, weil der Nenner ins Negative wechselt. In diesem Fall besteht eine besonders hohe Dringlichkeit zum Ersatz, weil zusätzlich zu der Gewinnzunahme noch eine Verminderung des benötigten Kapitals von

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.108.

A_{on} Geldeinheiten tritt[1].

Schließt man diesen besonderen Fall aus, so kann man die Aussage des Modells der zweiten MAPI-Methode dahingehend zusammenfassen, daß der Ersatz dann empfohlen wird, wenn die relative Rentabilität einen positiven Wert besitzt und die Durchführung des Ersatzes einen Kapitaleinsatz erfordert.

Die Art der behandelten Beispiele und die allgemeine Argumentation G. TERBORGHs lassen darauf schließen, daß er in erster Linie an den Ersatz älterer Anlagen denkt. Der Vergleich eines für den Ersatz vorgesehenen Objektes mit einer bestehenden wenig genutzten Anlage birgt das Problem der Schätzung des Kapitalverzehrs für die bestehende Anlage in sich. Für solche Anlagen kann der Kapitalverzehr durch Schätzung nur ebensogut oder ebensoschlecht ermittelt werden wie der Kapitalverzehr der Ersatzanlage geschätzt werden kann. Erfordert einer der beiden eine Berechnung, so braucht der andere sie auch. TERBORGHs Vorschlag, den vermiedenen Kapitalverzehr zu schätzen, muß in solchen Fällen als nicht ausreichend betrachtet werden.

Als Rechenhilfe zur Berechnung des Kapitalverzehrs der alten Anlage kann der Kapitalverzehr des letzten Nutzungsjahres vor dem Betrachtungszeitpunkt herangezogen werden. Der Quotient aus dem vorjährigen Kapitalverzehr und dem vorjährigen Restwert ergibt eine Wertminderungsrate. Sie läßt sich als Bruch der Restwerte ausdrücken.

$$\frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}} = 1 - \frac{R_n}{R_{n-1}}$$

In der Entwicklung der MAPI-Formel wurde das Verhältnis $\frac{R_n}{R_{n-1}}$

[1] G. TERBORGH macht für die Fälle, daß ein negativer Zähler mit einem positiven Nenner gekoppelt ist, eine Bemerkung, die zu Mißverständnissen führen kann. Er empfiehlt, die negative Rentabilität zu nehmen, wie sie ist.
Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.108 Anmerkung 1. Nach den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung wäre in diesen Fällen ausdrücklich von einem Ersatz abzuraten.

für alle Jahre als konstant angenommen[1].

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = w$$

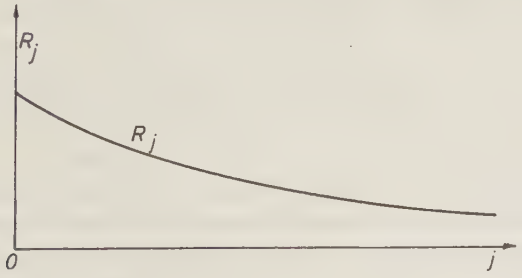
Setzt man diese Konstante w in die Beziehung ein, so erhält man als Rate des Kapitalverzehrs der bestehenden Anlage:

$$V_a(\%) = R_n(1-w) \cdot 100 \qquad (139)$$

Bei der Frage nach dem Kapitalverzehr des Restwertes mag sich auch folgender Gedanke anbieten. Man ermittelt den Wert aus dem MAPI-Diagramm durch Einsetzen der Restnutzungsdauer und des Restwertes. Doch ist dieser Weg irreführend, da für eine kürzere Lebensdauer ein höherer Prozentsatz des Wertes im Diagramm zum Ansatz kommt. Der Kapitalverzehr für das zweite Jahr wäre bei der Ermittlung über diesen Weg höher als der Kapitalverzehr im ersten Jahr. Diese Tatsache hätte bei konstanten Gewinnen einen jährlichen Ersatz zur Folge, was allen anderen Investitionsrechnungen widerspricht.

Der Kapitalverzehr, der eine konstante Abnahmerate des Kapi-

Restwertverlauf mit konstanter Wertminderungsrate



Figur 47

tals annimmt, $V_a = R_n(1-w)$, verursacht einen degressiv

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.222.

fallenden Verlauf des Restnutzungswertes.

Gegenüber den herkömmlichen Ersatzmodellen zeichnet sich das zweite MAPI-Modell dadurch aus, daß es versucht, sowohl den Restwert als auch den Nutzungswert und außerdem über die steuerliche Abschreibung den Buchwert zu berücksichtigen. Restwert und Nutzungswert[1] müssen nur am Ende der Nutzungsdauer übereinstimmen, solange die Anlage genutzt wird, entsteht durch die Differenz zwischen ihnen kein erwähnenswerter Fehler im Modell.

Wie im Modell der ersten MAPI-Methode wird auch in diesem Modell der technische Fortschritt berücksichtigt. Er ist im Gewinnverlauf und gleichzeitig in der relativen Rentabilität enthalten.

3. Abweichungsanalyse

Die Abweichung der relativen Rentabilität als Reaktion auf Abweichungen der Einzelgrößen ergibt sich als Summe der Einzelfehler.

$$f_{rr} = \frac{\delta r_r}{\delta d_r} f_{dr} + \frac{\delta r_r}{\delta V_a} f_{Va} + \frac{\delta r_r}{\delta V_n} f_{Vn} + \frac{\delta r_r}{\delta St} f_{St} + \frac{\delta r_r}{\delta A_{on}} f_{Aon}$$

Führt man die partielle Differentiation durch, so erhält man den absoluten Gesamtfehler als Funktion der absoluten Einzelfehler:

$$f_{rr} = \frac{f_{dr} + f_{Va} - f_{Vn} - f_{St}}{A_{on}} - \frac{f_{Aon}(d_r + V_a - V_n - St)}{A_{on}^2} \qquad (140)$$

Setzt man anstatt der absoluten Einzelfehler das Produkt aus relativem Einzelfehler und Eingangsgröße ein, so zeigt das

[1] Die Unterscheidung in einen Marktwert und den Nutzungswert hat V.L. SMITH diskutiert.
Vgl. Smith, V.L.: Depreciation, Market Valuations, and Investment Theory, in: Management Science Vol. 9 1963, S.690ff.

Ergebnis den absoluten Gesamtfehler als Funktion der relativen Einzelabweichungen an.

$$f_{rr} = \frac{f_{rdr} \cdot d_r + f_{rVa} \cdot V_a + f_{rVn} \cdot V_n + f_{rSt} \cdot St + f_{rAon}(d_r + V_a - V_n - St)}{A_{on}} \qquad (141)$$

Der relative Gesamtfehler $f_{rel\ rr}$ besteht aus dem Verhältnis von absolutem Gesamtfehler zu gemessener Größe:

$$f_{rel\ rr} = \frac{f_{rdr} \cdot d_r + f_{rVa} \cdot V_a + f_{rVn} \cdot V_n + f_{rSt} \cdot St}{d_r + V_a - V_n - St} + f_{rAon} \qquad (142)$$

Der relative Fehler erreicht auch für kleine Einzelfehler der Eingangsgrößen beträchtliche Werte, wenn die im Zähler der Definitionsgleichung für die relative Rentabilität stehende Differenz klein ist. Für kleine relative Gewinne besteht eine größere Fehlerempfindlichkeit als für große Gewinne. Die Ermittlung des Gesamtfehlers setzt die Kenntnis der Eingangsfehler voraus. Die Einzelfehler der Eingangsgrößen bestehen ihrerseits aus einer Fehlersumme. In dieser Fehlersumme bilden die Abweichungen der Elemente, die die Eingangsgrößen aufbauen, die Summanden.

Den einfachsten Aufbau besitzt die Nettoinvestitionsausgabe. Sie kann mit großer Genauigkeit ermittelt werden, weil in sie außer den gegebenenfalls geplanten Großreparaturen nur Werte der Gegenwart eingehen, über die eine gute Information besteht.

Der vermiedene Kapitalverzehr des nächsten Jahres kann ebenso wie der laufende Betriebsgewinn nur mit begrenzter Genauigkeit berechnet oder geschätzt werden. Die Art der Ermittlung, wie sie G. TERBORGH vorschlägt, sollte einer globalen Schätzung in jedem Falle vorgezogen werden, weil sonst über die mögliche Abweichung des Betriebsgewinns falsche Vorstellungen entstehen können. Der Fehler einer Globalschätzung übertrifft die Fehlersumme der Einzelschätzungen oft erheblich.

Über den Fehler des Kapitalverzehrs der Ersatzanlage, der durch Abweichungen der betrieblichen Gegebenheiten von den vorausgesetzten Annahmen wie Steuersatz, Verschuldungsgrad, Fremdkapitalverzinsung usw. entsteht, macht G. TERBORGH die Angabe, daß er ein Prozent nicht überschreitet[1]. Als Ablesefehler bei der Diagrammbenutzung kann man noch etwa ein Prozent addieren. Für die im DIN A 4 Format gedruckten MAPI-Diagramme geben die Steuerberichtigungsfaktoren zwei Dezimalstellen zuviel an, man kann nur soviele Dezimalstellen korrigieren, wie sich ablesen lassen, also zwei. Der Kapitalverzehr der Ersatzanlage läßt sich somit auf ungefähr zwei Prozent genau ermitteln, wenn bei der Wahl des Gewinnverlaufes oder einer anderen Größe kein Verfahrensfehler verursacht wurde und die Nutzungsdauer stimmt. Die Abweichung des Steuerbetrages wird in den meisten Fällen verschwindend gering sein.

---

[1] Vgl. Terborgh, G.: Business Investment Policy, a.a.O. S.234.

III. Das Modell zur Minimierung der Kapitalrückflußdauer, die Pay - off - Methode

Das Modell der Pay - off - Methode ermittelt den Zeitraum, den ein Investitionsobjekt benötigt, um aus seinen Einzahlungsüberschüssen die Anschaffungsausgabe aufzuwiegen. Bei der Auswahl eines Objektes aus einer Gruppe Alternativen wird das Objekt mit der kürzesten Kapitalrückflußdauer bevorzugt[1]. Die Zielsetzung des Unternehmers unterscheidet sich in diesem Falle also grundsätzlich von der Gewinnmaximierung oder der Rentabilitätsmaximierung des Gesamtkapitals. In Einzelfällen kann trotzdem die minimale Kapitalrückflußdauer mit dem maximalen Gewinn oder dem maximalen internen Zinsfuß zusammenfallen, nur dann läßt sich die Pay - off - Methode korrekterweise im Rahmen dieser Zielsetzungen anwenden[2].

Unter der Annahme eines stetigen Gewinnstromes mit momentaner Verzinsung müßte man die Kapitalrückflußdauer aus der folgenden Gleichung ermitteln:

$$\int_0^n (e(t) - a(t)) \exp^{-jt} \, dt = A_o$$

Die entsprechende Ursprungsform für den unstetigen Fall lautet:

$$\sum_{j=1}^{n} (e_j - a_j) \, q^{-j} = A_o$$

In den Ausgabebeträgen sind natürlich keine Abschreibungen enthalten. Diese beiden Definitionsgleichungen können für den

---

[1] Vgl. Lohmann, M.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, a.a.O. S.165.
Investitionsrechnung (I), (ohne Verf.), in: Kostenrechnungspraxis 1964, S.94.

[2] Moxter zeigt eine Verbindung zwischen Kapitalwertmaximierung und Kapitalbindungsdauer,
vgl. Moxter, A.: Der Einfluß der Amortisationsgeschwindigkeit auf die unternehmerische Investitionsentscheidung, in: ZfhF, NF 11. Jg. 1959, S.541ff.

allgemeinen Fall nicht nach n aufgelöst werden. Die bestehenden Modelle stellen daher, soweit sie die Rückflußdauer in einem einzigen Rechengang ermitteln, Näherungslösungen dar. In der Ersatzüberlegung arbeitet die Pay - off - - Methode mit Kosteneinsparungen, die durch die Vornahme des Ersatzes verursacht werden, und vergleicht sie mit der Anschaffungsausgabe. Die allgemeine Form der Näherungslösung lautet:

$$t(\text{Jahre}) = \frac{A_o}{\bar{a}} \quad \frac{(\text{DM})}{(\text{DM/Jahr})} \qquad (143)$$

Darin bedeutet $\bar{a}$ die durchschnittliche jährliche Kosteneinsparung des Ersatzobjektes.

Die Näherungsformeln der einzelnen in Gebrauch befindlichen Pay - off - Verfahren[1] unterscheiden sich lediglich in dem Ansatz für die durchschnittlichen Kostenersparnisse - nur ein Teil berücksichtigt Zinsen und schwankende Kosten - .

Soll die Entscheidung über den Ersatz einer Anlage gefällt werden, so muß neben der ermittelten Kapitalrückflußdauer noch ein gewünschter Vergleichszeitraum bestehen, der vom Unternehmer festzulegen ist. Diesen Tatbestand greift G. TERBORGH bei seiner Kritik besonders heraus[2].

Die Näherungsverfahren enthalten einen mehr- oder mindergroßen Verfahrensfehler, denn die korrekte Ermittlung der Kapitalrückflußdauer geht in einem schrittweisen Vergleich der kumulierten diskontierten Gewinne und der Anschaffungsausgabe vor sich. Zinsfuß und Zinsfußabweichungen wirken sich über die durchschnittlichen Kosteneinsparungen aus. Nähert sich der Zinssatz dem internen Zinsfuß, dann geht die Minimierung der Kapitalrückflußdauer in die Maximierung der Gesamtkapi-

---

[1] Vgl. Rummel, K.: Wirtschaftlichkeitsrechnung, a.a.O. S.77.
Albach, H.: Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, a.a.O. S.219ff.
Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.187ff.
Schindler, H.: Investitionsrechnungen in..., a.a.O. S.154ff.

[2] Vgl. Terborgh, G.: Dynamic Equipment Policy, a.a.O. S.189ff.

talrentabilität über[1], denn der reziproke Wert der Kapitalrückflußdauer stellt eine Rückflußrate für das eingesetzte Kapital A_o dar.

Eine Methode zur Berechnung der Kapitalrückflußdauer, die schrittweise auf den jährlichen Ersparnissen aufbaut, wurde von der American Society of Mechanical Engineers (ASME) entwickelt[2]. Diese Methode teilt die durchschnittliche Kostendifferenz in ihre Elemente auf und berechnet nacheinander die durchschnittliche jährliche Ersparnis, die durchschnittliche jährliche Nettoersparnis und die Kapitalrückflußdauer, wobei Restwertminderungen und technische Veraltung in dem Modell berücksichtigt werden.

Kleine Abweichungen der Eingangsgrößen in der Näherungsformel rufen die Zeitschwankung f_t hervor:

$$f_t = \frac{\delta t}{\delta A_o} f_{Ao} + \frac{\delta t}{\delta \bar{a}} f_{\bar{a}}$$

$$\boxed{f_t = \frac{1}{\bar{a}} f_{Ao} - \frac{A_o}{\bar{a}^2} f_{\bar{a}}} \qquad (144)$$

Setzt man für f_{Ao} das Produkt $A_o f_{rAo}$ und für $f_{\bar{a}}$ das Produkt $\bar{a} f_{r\bar{a}}$ ein, so ergibt sich die Gesamtabweichung als Funktion der relativen Einzelabweichungen zu:

$$f_t = \frac{1}{\bar{a}} A_o f_{rAo} - \frac{A_o}{\bar{a}^2} \bar{a} f_{r\bar{a}}$$

$$\boxed{f_t = \frac{A_o \left(f_{rAo} - f_{r\bar{a}} \right)}{\bar{a}}} \qquad (145)$$

Die Abweichung hängt wesentlich von der Größe der Anschaffungsausgabe ab. Die Einzelfehler gleichen Vorzeichens wirken einander entgegen.

---

[1] Vgl. Schindler, H.: Investitionsrechnungen in ..., a.a.O. S.58.

[2] Vgl. Carson, G.B.: Production Handbook, 2. Aufl. New York 1959, S. 23.23ff.

SCHLUSS

Die herkömmlichen Investitionsmodelle treten in so vielen Varianten auf, daß im Rahmen dieser grundsätzlichen Untersuchung nur ihre wesentlichen Vertreter analysiert werden konnten. Soweit sich in der erreichbaren Literatur übersehen läßt, gelingt es jedoch, auch die nichterwähnten Modelle in die drei Gruppen, die nach unternehmerischen Zielsetzungen geordnet sind, einzufügen und als Sonderfälle der genannten Modelle zu lösen.

Die Untersuchung zeigt, daß für die Modelle der herkömmlichen Investitionsrechnung eine Fehlerrechnung durchgeführt werden kann. Es lassen sich Fehlerformeln bilden, in denen die Empfindlichkeit der Modellaussagen gegen Schätzfehler und geringe Unsicherheiten der Eingangselemente sowie gegen Rechnungsungenauigkeiten beschrieben wird. Für spezielle Modelle, die einen bestimmten Gewinnverlauf unterstellen, können Tabellen und Diagramme von Fehlerfaktoren gebildet werden, die eine numerische Fehlerabschätzung beträchtlich vereinfachen.

Der Gesamtfehler setzt sich aus der Summe der Aussagenabweichungen für jede einzelne Eingangsgröße zusammen. Diese Einzelabweichungen zeigen die Empfindlichkeit der Modellaussage gegen kleine Abweichungen der einzelnen Eingangsgrößen. Sie ermöglichen es dem Unternehmer, die Eingangsgrößen in zwei Gruppen aufzuteilen. Die erste Gruppe umfaßt die Elemente ohne wesentlichen Einfluß auf die Modellaussage, während die andere Gruppe schon durch geringe eigene Schwankungen erhebliche Abweichungen der

Modellaussage verursacht. Der Unternehmer erhält durch diese Differenzierung einen Hinweis darauf, welche Eingangsgrößen mit sorgfältig ausgewählten Methoden möglichst genau zu ermitteln sind und welche frei geschätzt werden dürfen.

Ein wesentlicher Vorzug der Fehlerrechnung besteht darin, daß durch sie die Feststellung der Genauigkeit der berechneten Modellaussage ermöglicht wird. Die Tragweite der numerischen Modellaussage wird durch die Unsicherheit, die ihr anhaftet, begrenzt. Die Fehlerabschätzung zeigt als Ergebnis die Bandbreite dieser Unsicherheit. Somit ist es möglich, durch die Kennzeichnung der Fehlerbreite oder durch ihre Beachtung in der Modellaussage bei der Angabe nur der geltenden Ziffern die Grenzen des Ergebnisses festzulegen. Gerade dieser Kennzeichnung bedarf es in der numerischen Investitionsrechnung, um sie zu einem vertrauenswürdigen Instrument der betrieblichen Planung zu gestalten.

Sobald die Fehler der Eingangsgrößen ein gewisses Ausmaß überschreiten, findet die Fehlerrechnung ihre Grenzen. Die berechnete Abweichung enthält dann selbst einen erheblichen Fehler. Der Fehler des berechneten Fehlers wird dadurch verursacht, daß zur Abweichungsermittlung ein lineares Näherungsverfahren benutzt wird. In der entfernten Umgebung des betrachteten Funktionswertes reicht diese Näherung oft nicht mehr aus. Wo die Grenze der Fehlerabschätzung mit Hilfe einer Fehlerformel liegt, muß für den Einzelfall gesondert ermittelt werden. Generell kann man annehmen, daß sie sich außerhalb der 10%-Grenze der relativen Einzelfehler befindet. Bei größeren relativen Abweichungen und Unsicherheiten der Eingangsgrößen als 10% muß überprüft werden, ob das Ergebnis der Fehlerformel genau genug ist.

ANHANG 1

Der Fehler eines Quotienten

Der Quotient y besteht aus den beiden positiven Größen x_1 und x_2.

$$y = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_{1w} \pm f_1}{x_{2w} \pm f_2}$$

$$y_w = \frac{x_{1w}}{x_{2w}}$$

Den Fehler des Quotienten kann man ermitteln, wenn man von dem Näherungswert den wahren Wert abzieht.

$$y = \frac{x_{1w}}{x_{2w}} + \left(\frac{x_{1w} \pm f_1}{x_{2w} \pm f_2} - \frac{x_{1w}}{x_{2w}} \right)$$

$$f_y = \frac{(x_{1w} \pm f_1)x_{2w} - (x_{2w} \pm f_2)x_{1w}}{(x_{2w} \pm f_2)x_{2w}}$$

Nach dem Ausmultiplizieren heben sich einige Glieder auf.

$$f_y = \frac{\pm (f_1 x_{2w} + f_2 x_{1w})}{x_{2w}(x_{2w} \pm f_2)}$$

$$\boxed{f_y \approx \frac{\pm (f_1 x_2 + f_2 x_1)}{x_2 x_2}}$$

f_1 wird durch $x_1 f_{r1}$ und f_2 durch $x_2 f_{r2}$ ersetzt.

$$f_y \approx \frac{\pm (f_{r1} x_1 x_2 + f_{r2} x_1 x_2)}{x_2 x_2}$$

$$f_y \approx \frac{\pm x_1 (f_{r1} + f_{r2})}{x_2}$$

Der relative Fehler wird aus dem Betrag des Quotienten absoluter Fehler durch Näherungswert gebildet.

$$f_{ry} = \left| \frac{f_y}{y} \right| = \left| \frac{f_y \, x_2}{x_1} \right|$$

$$f_{ry} \approx \left| \frac{x_1 (f_{r1} + f_{r2}) \, x_2}{x_1 x_2} \right|$$

$$f_{ry} \approx f_{r1} + f_{r2}$$

ANHANG 2

Die Berechnung des Fehlerfaktors S_1 des Zinsfehlers für eine linear fallende Gewinnfolge

Der Fehlerfaktor der linearen Gewinnfolge besteht aus der Summe[1]:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} j\left(1 - \frac{j-1}{n}\right) q^{-j-1}$$

Als Summe aus der Folge ihrer Summanden schreibt man:

$$S_1 = \frac{1}{q^2} + \frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{q^3} + \frac{3\left(1-\frac{2}{n}\right)}{q^4} + \frac{4\left(1-\frac{3}{n}\right)}{q^5} + \ldots + \frac{n\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{q^{n+1}}$$

Diese Summe läßt sich in zwei Teilsummen zerlegen, wenn man die Klammern der Zähler ausmultipliziert.

$$S_1 = \frac{1}{q^2}\left(1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \ldots + \frac{n}{q^{n-1}}\right) - \frac{1}{nq^2}\left(\frac{1\cdot 2}{q} + \frac{2\cdot 3}{q^2} + \frac{3\cdot 4}{q^3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{q^{n-1}}\right)$$

Wie das Ergebnis der Faktorberechnung für konstante Gewinne zeigt, läßt sich die linke Summe zusammenfassen, sie stellt den Fehlerfaktor für konstante Gewinne dar.

$$S_1 = S_k - \frac{1}{nq^2}\left(\frac{1\cdot 2}{q} + \frac{2\cdot 3}{q^2} + \frac{3\cdot 4}{q^3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{q^{n-1}}\right)$$

Das Korrekturglied zu dem Fehlerfaktor S_k soll S_{1k} symbolisieren.

$$S_1 = S_k - S_{1k}$$

Als erster Rechenschritt zur Ermittlung des Korrekturfaktors S_{1k} als zusammenfassender Ausdruck wird von der Folge für nS_{1k} die Folge $nS_{1k}q^{-1}$ subtrahiert.

---

[1] Vgl. Formel (42) auf Seite 53.

$$nS_{1k} = \frac{1\cdot2}{q^3} + \frac{2\cdot3}{q^4} + \frac{3\cdot4}{q^5} + \ldots + \frac{n(n-1)}{q^{n+1}}$$

$$nS_{1k}q^{-1} = \frac{2\cdot1}{q^4} + \frac{3\cdot2}{q^5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{q^{n+1}} + \frac{n(n-1)}{q^{n+2}}$$

$$nS_{1k}(1-q^{-1}) = \frac{2}{q^3} + \frac{2\cdot2}{q^4} + \frac{2\cdot3}{q^5} + \ldots + \frac{2(n-1)}{q^{n+1}} - \frac{n(n-1)}{q^{n+2}}$$

Die Folge, aus der die Summe nun besteht, wird einer ähnlichen zweiten Rechenoperation unterworfen. Man subtrahiert das (q^{-1})-fache dieser Reihe von ihr und dividiert das Ergebnis durch zwei. Das Resultat zeigt die bekannte geometrische Reihe und zwei zusätzliche Glieder.

$$\frac{S_{1k}(1-q^{-1})^2n}{2q^{-3}} = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + \frac{(n-1)(-n-2)}{2q^{n-1}} + \frac{n^2-n}{2q^n}$$

$$\frac{S_{1k}(q-1)^2nq}{2} = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}} + \frac{-n^2-n}{2q^{n-1}} + \frac{n^2-n}{2q^n}$$

Ein Teil der Folge kann zusammengezogen werden.

$$\frac{S_{1k}(q-1)^2nq}{2} = \frac{q^{-n}-1}{q^{-1}-1} - \frac{n^2+n}{2q^{n-1}} + \frac{n^2-n}{2q^n}$$

Diese Gleichung ergibt nach S_{1k} entwickelt:

$$S_{1k} = \frac{2(q^{-n}-1)(-1)}{-q(q^{-1}-1)(q-1)^2\cdot n} - \frac{2(n^2+n)}{2q^{n-1}\cdot q(q-1)^2\cdot n} + \frac{2(n^2-n)}{2q^n\cdot q(q-1)^2\cdot n}$$

$$S_{1k} = \frac{1}{i^2}\left(\frac{2(1-q^{-n})}{ni} - \frac{n+1}{q^n} + \frac{n-1}{q^{n+1}}\right)$$

Der Fehlerfaktor S_1 setzt sich aus S_k und S_{1k} zusammen und besitzt nun die Form:

$$S_1 = \frac{1-q^{-n}}{i^2} - \frac{n\cdot q^{-n-1}}{i} - \frac{1}{i^2}\left(\frac{2(1-q^{-n})}{ni} - \frac{n+1}{q^n} + \frac{n-1}{q^{n+1}}\right)$$

ANHANG 3

Die Berechnung des Fehlerfaktors S_d des Zinsfehlers für eine degressiv fallende Gewinnfolge

Für eine zeitlich degressiv fallende Gewinnfolge besteht der Fehlerfaktor aus der Summe[1]:

$$S_d = \sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{1}{p_d^{j-1}}\right) q^{-j-1}$$

Nach dem Herausziehen des allen Summanden gemeinsamen Faktors q^{-2} stehen die Degressionsraten p_d in jedem Summanden in der gleichen Potenz wie der Diskontfaktor.

$$S_d = \frac{1}{q^2}\left(1 + \frac{2}{p_d q} + \frac{3}{p_d^2 q^2} + \frac{4}{p_d^3 q^3} + \ldots + \frac{n}{p_d^{n-1} q^{n-1}}\right)$$

Nachdem beide Seiten der Gleichung mit q^2 multipliziert wurden, zieht man von dem Ergebnis das $\frac{1}{p_d q}$ - fache des Ergebnisses ab.

$$S_d q^2 - \frac{S_d q^2}{p_d q} = 1 + \frac{1}{p_d q} + \frac{1}{p_d^2 q^2} + \frac{1}{p_d^3 q^3} + \ldots + \frac{1}{p_d^{n-1} q^{n-1}} - \frac{n}{p_d^n q^n}$$

Die geometrische Reihe auf der rechten Seite der Gleichung wird zu dem bekannten Summenausdruck zusammengefaßt.

$$S_d q^2 \left(1 - \frac{1}{p_d q}\right) = \frac{p_d^{-n} q^{-n} - 1}{p_d^{-1} q^{-1} - 1} - \frac{n}{p_d^n q^n}$$

Beide Seiten der Gleichung werden durch $q^2(1 - p_d^{-1} q^{-1})$ dividiert.

---

[1] Vgl. Formel (45) auf Seite 56.

$$S_d = \frac{p_d^{-n}q^{-n} - 1}{(p_d^{-1}q^{-1} - 1)(1 - p_d^{-1}q^{-1})q^2} - \frac{n}{p_d^n q^n (1 - p_d^{-1}q^{-1})q^2}$$

Durch Erweiterung des ersten Bruches mit $-p_d^2$ und des zweiten Bruches mit p_d entsteht eine Möglichkeit, beide Brüche zu vereinfachen.

$$S_d = \frac{(p_d^{-n}q^{-n} - 1)(-p_d^2)}{(p_d^{-1}q^{-1} - 1)(p_d^{-1}q^{-1} - 1)p_d^2 q^2} - \frac{np_d}{(1 - p_d^{-1}q^{-1})p_d^n q^n q^2 p_d}$$

Jede Klammer der beiden Nenner wird mit $p_d q$ multipliziert, und das lautet:

$$\boxed{S_d = \frac{(1 - (p_d q)^{-n})p_d^2}{(p_d q - 1)^{+2}} - \frac{np_d}{(p_d q - 1)q(p_d q)^n}}$$

Für sehr große n nähert sich der rechte Bruch dem Wert Null und der Zähler des linken Bruches dem Wert p_d^2.

$$\boxed{S_{d\infty} = \frac{p_d^2}{(p_d q - 1)^2}}$$

ANHANG 4

Die Entwicklung der Maximumbedingung für ein Ersatzmodell mit Goodwillmaximierung bei Berücksichtigung von Zinseszinsen.

Der Kapitalwert einer unendlich langen Kette identischer Investitionsobjekte, die jedes eine Nutzungsdauer von n Jahren besitzen, heißt $C_{\infty n}$. Gibt n die Nutzungsdauer an, für die ein maximaler Kapitalwert oder Goodwill erzielt wird, so wird dieses Goodwillmaximum durch die beiden folgenden Bedingungen beschrieben.

$$C_{\infty n} > C_{\infty n+1}$$

$$C_{\infty n} > C_{\infty n-1}$$

Aus diesen Bedingungen wird ein Optimumkriterium entwickelt, das nur elementare wirtschaftliche Größen des Investitionsobjektes enthält.
Die erste Bedingung bedeutet:

$$C_{\infty n} - C_{\infty n+1} > 0$$

Für die Kapitalwerte werden die Modellgrößen eingesetzt:

$$\frac{1}{1-q^{-n}}\left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n}\right) - \frac{1}{1-q^{-n-1}}\left(\sum_{j=o}^{n+1} d_j q^{-j} - R_{n+1} q^{-n-1}\right) > 0$$

Beide Seiten der Ungleichung werden mit $(1 - q^{-n-1})$ multipliziert und das letzte Glied der rechten Summe wird gesondert geschrieben.

$$\frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + \frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-n}} R_n q^{-n} - \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} - R_{n+1} q^{-n-1} - d_{n+1} q^{-n-1} > 0$$

Vereinigt man die Summen und addiert einige Glieder auf beiden Seiten der Ungleichung, ergibt sich:

$$\frac{q^{-n} - q^{-n-1}}{1 - q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > d_{n+1} q^{-n-1} + R_{n+1} q^{-n-1} - \frac{1-q^{-n-1}}{1-q^{-n}} R_n q^{-n}$$

Es erfolgt die Vervielfachung beider Seiten mit q^{n+1} ;

$$\frac{q-1}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > d_{n+1} + R_{n+1} - \frac{R_n q(1-q^{-n-1})}{1 - q^{-n}}$$

$$\frac{i}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > d_{n+1} + R_{n+1} - \frac{R_n q - R_n q^{-n} + R_n q^{-n+1} - R_n q^{-n+1}}{1 - q^{-n}}$$

$$\frac{i}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > d_{n+1} + R_{n+1} - R_n q - \frac{R_n q^{-n} (q - 1)}{1 - q^{-n}}$$

$$\boxed{\frac{i}{1-q^{-n}} \left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n} \right) > d_{n+1} - iR_n - (R_n - R_{n+1})}$$

Damit ist das erste Kriterium für die optimale Nutzungsdauer n entwickelt.

In die zweite Bedingung werden die entsprechenden Funktionen eingesetzt.

$$C_{\infty n} - C_{\infty n-1} > 0$$

$$\frac{1}{1-q^{-n}} \left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n} \right) - \frac{1}{1-q^{-n+1}} \left(\sum_{j=o}^{n-1} d_j q^{-j} + R_{n-1} q^{-n+1} \right) > 0$$

Durch Multiplikation mit $(1-q^{-n+1})$ und gleichzeitiger Addi-

tion und Subtraktion des Gewinnes $d_n q^{-n}$ entsteht:

$$\frac{1-q^{-n+1}}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + \frac{1-q^{-n+1}}{1-q^{-n}} R_n q^{-n} - \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} - R_{n-1} q^{-n+1} + d_n q^{-n} > 0$$

Man vereinigt die Summen und addiert einige Glieder auf beiden Seiten der Ungleichung:

$$\frac{q^{-n} - q^{-n+1}}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > -d_n q^{-n} - \frac{1-q^{-n+1}}{1-q^{-n}} R_n q^{-n} + R_{n-1} q^{-n+1}$$

Beide Seiten werden mit q^n multipliziert; dem Zähler des Bruches auf der rechten Seite wird gleichzeitig $R_n q^{-n}$ hinzugefügt und abgezogen:

$$\frac{1 - q}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} > -d_n - \frac{R_n - R_n q^{-n+1} + R_n q^{-n} - R_n q^{-n}}{1 - q^{-n}} + qR_{n-1}$$

Durch eine Multiplikation der ganzen Ungleichung mit -1 dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

$$\frac{q - 1}{1-q^{-n}} \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} < d_n - qR_{n-1} + R_n - \frac{R_n(q - 1)}{1-q^{-n}}$$

$$\boxed{\frac{i}{1-q^{-n}} \left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j} + R_n q^{-n} \right) < d_n - iR_{n-1} - (R_{n-1} - R_n)}$$

Dies ist das zweite Kriterium für die optimale Nutzungsdauer von n Jahren.

Die linke Seite der beiden entwickelten Ungleichungen stellt den Durchschnittsgewinn $iC_{\infty n}$ für die unendlich lange Kette dar, die rechte Seite den Gewinn des durch den Index von d angegebenen Jahres.

Die Aussage lautet: Die optimale Nutzungsdauer ist dann erreicht, wenn der Durchschnittsgewinn zum ersten Mal größer ist als der Gewinn des nächsten Jahres.

ANHANG 5

Die Ermittlung der Bedingungen für den optimalen Ablösungspunkt einer bestehenden Anlage durch eine unendlich lange Kette identischer Glieder, wenn die Rohgewinne auf den Jahresanfang zusammengezogen werden.

Der Kapitalwert eines einzelnen Gliedes der Kette beträgt, wenn die Rohgewinne auf den Jahresanfang zusammengezogen werden:

$$C = \sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j+1} + R_n q^{-n}$$

Der Anschaffungswert und der erste Gewinn fallen zeitlich zusammen. Der Kapitalwert oder Goodwill einer unendlichen Kette solcher identischer Glieder beträgt:

$$C_{\infty n} = \frac{1}{1 - q^{-n}} \left(\sum_{j=o}^{n} d_j q^{-j+1} + R_n q^{-n} \right)$$

Wenn man diese Kette als die neue ansetzt, die die Kette ablösen soll, der das bestehende Aggregat angehört, so ist m der beste Ablösungszeitpunkt, wenn der Kapitalwert der Summe aus den diskontierten Gewinnen der alten Anlage bis zum Zeitpunkt der Ablösung plus dem diskontierten Restwert plus dem diskontierten Kapitalwert der neuen Kette sein Maximum erreicht.

$$C_{\infty m} = \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m}$$

$$C_{\infty m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} d_j q^{-j+1} + R_{m-1} q^{-m+1} + C_{\infty n} q^{-m+1}$$

$$C_{\infty m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} d_j q^{-j+1} + R_{m+1} q^{-m-1} + C_{\infty n} q^{-m-1}$$

Das Kapitalwertmaximum wird durch die beiden Ungleichungen beschrieben:

$$C_{\infty\, m} - C_{\infty\, m-1} > 0$$

$$C_{\infty\, m} - C_{\infty\, m+1} > 0$$

Setzt man für die erste Ungleichung die Reihen ein, aus denen sich der Kapitalwert zusammensetzt, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m-1} d_j q^{-j+1} - R_{m-1} q^{-m+1} - C_{\infty n} q^{-m+1} > 0$$

Die zweite Summe wird auf m Glieder ergänzt, indem man $d_m q^{-m+1}$ gleichzeitig addiert und subtrahiert.

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + d_m q^{-m+1} - R_{m-1} q^{-m+1} - C_{\infty n} q^{-m+1} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf, da sie nun gleich sind und verschiedene Vorzeichen besitzen.

$$R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} + d_m q^{-m+1} - R_{m-1} q^{-m+1} - C_{\infty n} q^{-m+1} > 0$$

Nach einer Multiplikation der Ungleichung mit q^m und einem Umordnen der einzelnen Summanden ergibt sich:

$$R_m + d_m q - R_{m-1} q > C_{\infty n} q - C_{\infty n}$$

Die erste Bedingung für den optimalen Ablösungszeitpunkt lautet somit:

$$d_m q - i R_{m-1} - (R_{m-1} - R_m) > i C_{\infty n}$$

Die zweite Ungleichung, die das Kapitalwertmaximum beschreibt, lautet:

$$C_{\infty\, m} - C_{\infty\, m+1} > 0$$

In sie setzt man die beiden Reihen ein:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + R_m q^{-m} + C_{\infty\, n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m+1} d_j q^{-j+1} - R_{m+1} q^{-m-1} - C_{\infty\, n} q^{-m-1} > 0$$

Das letzte Glied der zweiten Summe wird aus ihr herausgelöst:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} + R_m q^{-m} + C_{\infty n} q^{-m} - \sum_{j=1}^{m} d_j q^{-j+1} - R_{m+1} q^{-m-1} - C_{\infty n} q^{-m-1} - d_{m+1} q^{-m} > 0$$

Die beiden Summen heben sich gegenseitig auf. Multipliziert man danach die Ungleichung mit q^{m+1}, so lautet die Ungleichung:

$$R_m q + C_{\infty\, n} q - d_{m+1} q - R_{m+1} - C_{\infty\, n} > 0$$

Nach einer kleinen Umgruppierung zeigt sich das Ergebnis:

$$d_{m+1} q - i R_m - (R_m - R_{m+1}) < i C_{\infty\, n}$$

Somit lassen sich die beiden Bedingungen für den optimalen Ablösungspunkt bei Gewinnen, die auf den Jahresanfang fallen, zusammenfassen:

$$d_m q - i R_{m-1} - (R_{m-1} - R_m) > i C_{\infty\, n}$$

$$d_{m+1} q - i R_m - (R_m - R_{m+1}) < i C_{\infty\, n}$$

ANHANG 6

Die Auswirkung der Verminderung der jährlichen Gewinne um eine konstante Größe auf die durchschnittlichen Gewinne der Kette

Zieht man aus den Differenzen zwischen jährlichen Einnahmen und Ausgaben den Restwert zum Ersatzzeitpunkt und den Anschaffungswert heraus, so lautet die Gleichung für den durchschnittlichen jährlichen Gewinn einer unendlich langen Kette identischer Investitionen:

$$iC_{\infty n} = \frac{i}{1 - q^{-n}} \left(\sum_{j=1}^{n} d_j q^{-j} - A_o + R_n q^{-n} \right)$$

Der jährliche Gewinn soll nun um die Größe s vermindert werden.

$$iC'_{\infty n} = \frac{i}{1 - q^{-n}} \left(\sum_{j=1}^{n} (d_j - s) q^{-j} - A_o + R_n q^{-n} \right)$$

Die Summe läßt sich in zwei Teilsummen zerlegen.

$$iC'_{\infty n} = \frac{i}{1-q^{-n}} \left(\sum_{j=1}^{n} d_j q^{-j} - A_o + R_n q^{-n} \right) - \frac{i}{1-q^{-n}} \left(\sum_{j=1}^{n} s q^{-j} \right)$$

Die erste Klammer stellt den Kapitalwert der ursprünglichen Kette dar, aus der zweiten Summe kann q^{-1} herausgezogen werden:

$$iC'_{\infty n} = iC_{\infty n} - \frac{i}{1 - q^{-n}} \left(\frac{s}{q} \sum_{j=1}^{n} q^{-j+1} \right)$$

Die Summe läßt sich auch nach der bekannten Summenformel für eine geometrische Reihe als Bruch schreiben.

$$iC'_{\infty n} = iC_{\infty n} - \frac{i}{1 - q^{-n}} \left(\frac{s\,(1 - q^{-n})}{q\,(1 - q^{-1})} \right)$$

$$iC'_{\infty n} = C_{\infty n} - \frac{is}{q - 1}$$

Das Ergebnis zeigt, daß sich die durchschnittlichen jährlichen Gewinne ebenso um s vermindern, zieht man von jedem jährlichen Gewinn die Größe s ab.

$$\boxed{iC'_{\infty n} = iC_{\infty n} - s}$$

ANHANG 7

Diskonttabellen

Jahre	Zinssatz				
	20%	30%	40%	50%	60%
1	0,833	0,770	0,717	0,667	0,625
2	0,694	0,592	0,501	0,444	0,391
3	0,579	0,455	0,358	0,296	0,244
4	0,482	0,350	0,256	0,197	0,152
5	0,402	0,296	0,183	0,131	0,095
6	0,335	0,207	0,130	0,088	0,060
7	0,279	0,159	0,093	0,058	0,037
8	0,233	0,122	0,067	0,039	0,023
9	0,194	0,094	0,048	0,026	0,015
10	0,162	0,072	0,033	0,017	0,009

Jahre	Zinssatz			
	70%	80%	90%	100%
1	0,588	0,556	0,526	0,500
2	0,346	0,308	0,277	0,250
3	0,204	0,172	0,146	0,125
4	0,120	0,095	0,077	0,063
5	0,070	0,053	0,040	0,031
6	0,041	0,029	0,021	0,016
7	0,024	0,016	0,011	0,008
8	0,014	0,009	0,006	0,004
9	0,008	0,005	0,003	0,002
10	0,005	0,003	0,002	0,001

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

ERSTES KAPITEL

e	=	Einnahmen
a	=	Ausgaben
t	=	Zeit
K_o	=	Kapitalbetrag zum Zeitpunkt 0
K_n	=	Kapitalbetrag zum Zeitpunkt n
q	=	Aufzinsungsfaktor
i	=	Kalkulationszinssatz in Dezimalen
r	=	interner Zinsfuß in Dezimalen
exp	=	Basis des natürlichen Logarithmus (e)
j	=	Verzinsungsintensität
n	=	Zahl der Zeiteinheiten
A_o	=	Anschaffungsausgabe
z_j	=	Zinsen des Jahres j
k_j	=	Abschreibungsbetrag für das Jahr j
e_j	=	Einnahmen zum Zeitpunkt j
a_j	=	Ausgaben zum Zeitpunkt j
C	=	Kapitalwert, Goodwill
E	=	Barwert aller Einnahmen
A	=	Barwert aller Ausgaben
B	=	Betriebskoeffizient
R(x)	=	Gesamtkapitalrentabilität als Funktion von x

ZWEITES KAPITEL

x	=	allgemeine Größe
a_j	=	Ziffer
f	=	Fehler
x_j	=	Näherungswert
x_{wj}	=	wahrer oder wahrscheinlichster Wert von x_j
f_j	=	Fehler des Näherungswertes x_j
f_{rj}	=	relativer Fehler der Größe x_j
y	=	allgemeine Funktion
f_y	=	Fehler der Funktion y
f_{ry}	=	relativer Fehler der Funktion y
a	=	unabhängige Variable
h	=	geringe Abweichung der Variablen a
R_n	=	Restglied einer nach n Gliedern abgebrochenen Reihe

φ = Dichtefunktion zufälliger Fehler
σ = Standardabweichung
f_s = scheinbarer Fehler
f_m = mittlerer Fehler
f_w = wahrscheinlicher Fehler
f_{my} = mittlerer Fehler der Funktion y
f_{mj} = mittlerer Fehler der Größe x_j

DRITTES KAPITEL

a_j = Ausgaben zum Zeitpunkt j
e_j = Einnahmen zum Zeitpunkt j
$\bar{a}$ = durchschnittliche Ausgaben
U_n = durchschnittliche Nettoausgaben
B_a = jährliche Betriebsausgaben der alten Anlage
σ_a^o = Annuität aus dem Restwert der alten Anlage zur Zeit o
σ_a^{ta} = Annuität aus dem Restwert der alten Anlage zur Zeit ta
$A(n)$ = Gesamtkosten für Einzelersatz und Gruppenersatz
A_{on} = Nettoinvestitionsausgabe
V_a = vermiedener Kapitalverzehr des nächsten Jahres
V_n = entstehender Kapitalverzehr des nächsten Jahres
St = Ertragsteuern
U = Nutzleistung
w = Nutzleistungspreis
A_{ok} = Anschaffungsausgabe der Investition k (k = 1, 2, ...)
d_j = Gewinn zum Zeitpunkt j
$\bar{d}$ = durchschnittlicher jährlicher Gewinn
d_{1k} = Gewinn der Investition k im ersten Jahr (k=1,2,...)
d_{rj} = relativer Einnahmenüberschuß
$\bar{d}_m$ = gewogenes Mittel der Gewinne
$\bar{d}_\infty$ = durchschnittlicher Gewinn einer unendlichen Reihe
$\bar{d}_{m\infty}$ = gewogenes Mittel der Gewinne einer unendlichen Reihe
d_r = laufender Betriebsgewinn
d_{sf} = Steuerfreibetrag
d_{st} = zu versteuernder Gewinn
$Q(t)$ = Rohgewinn der Periode t
C_k = Kapitalwert der Investition k (k = 1, 2, ...)
C_{wk} = wahrer Kapitalwert der Investition k (k = 1, 2,...)

C_{∞} = Kapitalwert einer unendlichen Kette

$C_{\infty n}$ = Kapitalwert einer unendlichen Kette aus Gliedern der Länge n

C_n = Kapitalwert einer Anlage mit n-jähriger Nutzung

$A_{\infty n}$ = Barwert der Kosten einer unendlichen Kette aus Gliedern der Länge n

V_j = Verfahrensnachteil zum Zeitpunkt j

$V_{d\ min}$ = minimaler durchschnittlicher Verfahrensnachteil

I_d = durchschnittlicher Intensitätsnachteil

I_j = Intensitätsnachteil zum Zeitpunkt j

I_{dw} = wahrer durchschnittlicher Intensitätsnachteil

g = Intensitätsabnahme

W_d = durchschnittliche Restwertminderung

W_{dw} = wahre durchschnittliche Restwertminderung

Z_d = durchschnittliche Zinsen

Z_{dw} = wahre durchschnittliche Zinsen

r_r = relative Rentabilität

K = Gesamtkapital

K_e = Eigenkapital

K_f = Fremdkapital

P = Verhältnis von Fremdkapital zu Gesamtkapital

z = Rentabilität des Eigenkapitals nach Steuerabzug

y = Fremdkapitalzinsfuß

b = Ertragsteuersatz in Dezimalen

r = interner Zinsfuß

r' = interner Zinsfuß vor Steuerabzug

i = Kalkulationszinssatz in Dezimalen

i_w = wahrer Kalkulationszinssatz in Dezimalen

v = Diskontfaktor

$p(j)$ = Ausfallwahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt j

$P(j)$ = Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt j

$f(t)$ = Ausfallrate

t_m = mittlere Lebensdauer

$h(j)$ = zeitlicher Gewinnverlauf

S' = Fehlerfaktor

S_k = Fehlerfaktor für konstante Gewinne

$S_{k\infty}$ = Fehlerfaktor für konstante Gewinne bei unendlicher Dauer

S_l = Fehlerfaktor für linear fallende Gewinne

S_d = Fehlerfaktor für degressiv fallende Gewinne

$S_{d\infty}$ = Fehlerfaktor für degressiv fallende Gewinne bei unendlicher Dauer

S_p = Fehlerfaktor für progressiv fallende Gewinne

S_a = Fehlerfaktor für Durchschnittsgewinne

p_d = Degressionsrate

f_i = Zinsfehler

f_{Ci} = Kapitalwertfehler auf Grund von Zinsfehlern

f_{rCi} = relativer Kapitalwertfehler auf Grund von Zinsfehlern

f_{dj} = Fehler des Gewinns d_j

f_{Cdj} = Kapitalwertfehler auf Grund des Gewinnfehlers f_{dj}

f_{Cd} = Kapitalwertfehler auf Grund von Gewinnfehlern

f_{rdj} = relativer Fehler des Gewinnes d_j

f_{rCd} = relativer Kapitalwertfehler auf Grund von Gewinnfehlern

f_d = Gewinnfehler

f_e = Einnahmenfehler

f_a = Ausgabenfehler

f_{rd} = relativer Gewinnfehler

f_{re} = relativer Einnahmenfehler

f_{ra} = relativer Ausgabenfehler

$f_{\bar{d}i}$ = Durchschnittsgewinnfehler auf Grund von Zinsfehlern

$f_{\bar{d}d}$ = Durchschnittsgewinnfehler auf Grund von Gewinnfehlern

$f_{r\bar{d}d}$ = relativer Durchschnittsgewinnfehler

f_{Id} = Fehler des durchschnittlichen Intensitätsnachteils

f_{Wd} = Fehler der durchschnittlichen Restwertminderung

f_{Zd} = Fehler der durchschnittlichen Zinsen

$f_{Vd\ min}$ = Fehler des Minimums des durchschnittlichen Verfahrensnachteils

$f_{(1+r)dj}$ = Fehler des internen Zinsfußes auf Grund des Gewinnfehlers f_{dj}

$f_{(1+r)i}$ = Fehler des internen Zinsfußes durch Gewinnfehler

f_{rw} = relativer Fehler des Nutzleistungspreises w

f_{rr} = Fehler der relativen Rentabilität

$f_{rel\ rr}$ = relativer Fehler der relativen Rentabilität

f_t = Fehler der Kapitalrückflußdauer

ABKÜRZUNGEN

MAPI	=	Machinery and Allied Products Institute
MS	=	Management Science
OR	=	Operations Research
ZfB	=	Zeitschrift für Betriebswirtschaft
ZfhF	=	Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung
ZfR	=	Zeitschrift für das gesamte Rechnungswesen

LITERATURVERZEICHNIS

A. Monographien

Albach, H.,	Wirtschaftlichkeitsrechnung bei unsicheren Erwartungen, Köln und Opladen 1959
Albach, H.,	Investition und Liquidität, Wiesbaden 1962
Angermann, A.,	Entscheidungsmodelle, Frankfurt/Main 1963
Böhm-Bawerk, E.v.,	Kapital und Kapitalzins, 4. Aufl. Jena 1921
Borchard, K.-H.,	Wirtschaftlichkeitsplanung, Wiesbaden 1962
Brandt, H.,	Investitionspolitik des Industriebetriebes, Wiesbaden 1959
Briel, H.v.,	Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, Zürich 1955
Bronner, A.,	Vereinfachte Wirtschaftlichkeitsrechnung, Berlin-Köln-Frankfurt/Main 1964
Bronstein, I., Semendjajew, K.,	Taschenbuch der Mathematik, 6. Aufl. Moskau 1956, Deutsche Übersetzung von Ziegler, V., Leipzig, 3. Aufl. Frankfurt/Main 1962
Buffa, E.S.,	Models for Production and Operations Management, New York-London 1963
Carson, G.B.,	Production Handbook, New York 1959
Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L.,	Operations Research, Eine Einführung in die Unternehmensforschung, Wien und München 1961
Courant, R., Robbins, H.,	Was ist Mathematik, Berlin-Göttingen, Heidelberg 1962
Dean, J.,	Capital Budgeting, New York 1951
Dürr, K.,	Investitionsrechnung Bd. I, Allgemeine Investitionsrechnung und Grundlagen der Wirtschaftsmathematik, Bern 1958
Fisz, M.,	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 3. durchg. Aufl. Berlin 1965
Gerbel, B.M.,	Rentabilität, Wien 1955
Grossmann, W.,	Grundzüge der Ausgleichsrechnung, 2. Auflage Berlin 1961

Gutenberg, E., Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, Wiesbaden 1958

Gutenberg, E., Untersuchungen über die Investitionsentscheidungen industrieller Unternehmen, Köln und Opladen 1959

Gutenberg, E., Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre Bd. 1, Die Produktion, 7.Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962

Gutenberg, E., Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre Bd. 2, Der Absatz, 5.Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962

Hänsel, H., Grundzüge der Fehlerrechnung, Berlin 1965

Heister, M., Rentabilitätsanalyse von Investitionen, Köln und Opladen 1962

Illetschko, L.L., Betriebswirtschaftslehre für Ingenieure, Wien-New York 1965

Jonas, H., Investitionsrechnung, Berlin 1964

Knetschke, C., Die Zinsreagibilität der industriellen Investition, Frankfurt/Main 1963

Kosiol, E., Finanzmathematik, Wiesbaden 1959

Kreis, R., Möglichkeiten und Grenzen der Anwendung der Kapitalwertmethode bei Investitionsentscheidungen, Böblingen 1964

Küster, F.W., Logarithmische Rechentafeln, Laboratoriums-Taschenbuch für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker, Berlin 1941

Laugwitz, D., Ingenieurmathematik II, B-I-Hochschultaschenbücher für den Ingenieur Bd. 60, Mannheim 1964

Lense, J., Vorlesungen über höhere Mathematik, München 1948

Linder, A., Statistische Methoden, Basel-Stuttgart 1960

Löffelbein, K., Kompendium der mathematischen Wirtschaftstheorie, I. Bd. Die mathematischen Grundlagen und die mathematische Statistik für Volks- und Betriebswirte, Wiesbaden 1959

Lohmann, M., Einführung in die Betriebswirtschaftslehre, 4. neubearb. Aufl. Tübingen 1964

Lücke, W.,	Finanzplanung und Finanzkontrolle in der Industrie, Wiesbaden 1965
Lutz, F. und V.,	The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951
Mangoldt, H.v., Knopp, K.,	Einführung in die höhere Mathematik, 2. Bd. 11. Aufl. Stuttgart 1958
Meij, I.L.,	Depreciation and Replacement Policy, Amsterdam 1961
Meyers	Großer Rechenduden, Mannheim 1961
Morgenstern, D.,	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964
Morgenstern, O.,	Über die Genauigkeit wirtschaftlicher Beobachtungen, 2. neubearb. und erweiterte Aufl. Wien-Würzburg 1965
Morse, P.M.,	Queues Inventories and Maintenance, Publications in: Operations Research Nr. 1, New York-London 1963
Nicolas, M.,	Finanzmathematik, Sammlung Göschen Bd. 1183/1183 a, Berlin 1959
Pack, L.,	Betriebliche Investitionen, Wiesbaden 1959
Pfanzagl, J.,	Allgemeine Methodenlehre der Statistik I, Sammlung Göschen Bd. 746/746 a, 2. neubearb. Aufl. Berlin 1964
Pfanzagl, J.,	Allgemeine Methodenlehre der Statistik II, Sammlung Göschen Bd. 747/747 a, Berlin 1962
Pflier-Jahn, H.,	Elektrische Meßgeräte und Meßverfahren, Berlin-Heidelberg-New York 1965
Poloshi, G.N.,	Mathematisches Praktikum, Zürich und Frankfurt/Main 1964
Sabel, H.,	Die Grundlagen der Wirtschaftlichkeitsrechnungen, Berlin 1965
Sasieni, M., Yaspan, A., Friedman, L.,	Methoden und Probleme der Unternehmensforschung, Operations Research, (deutsch von Künzi, H.P.), Würzburg 1962
Sauer, R.,	Ingenieur-Mathematik, 1. Band Differential- und Integralrechnung, 3. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964
Schindler, H.,	Investitionsrechnungen in Theorie und Praxis, 2. Aufl. Meisenheim 1963

Schneider, D.,	Die wirtschaftliche Nutzungsdauer von Anlagegütern, Köln und Opladen 1961
Schneider, E.,	Wirtschaftlichkeitsrechnung, Theorie der Investition, 4. durchges. Auflage Tübingen-Zürich 1962
Schneider, H.,	Der Einfluß der Steuern auf die unternehmerischen Investitionsentscheidungen, Tübingen 1964
Schrutka, L.,	Elemente der höheren Mathematik, 7. Aufl. Wien 1948
Schülke	Schülkes Tafeln, Stuttgart 1957
Smirnow, N.W., Dunin-Barkowski, I.W.,	Mathematische Statistik in der Technik, Berlin 1963
Smith, V.L.,	Investment and Production, Cambridge Mass. 1961
Sommer, F.,	Einführung in die Mathematik für Studenten der Wirtschaftswissenschaften, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962
Stackelberg, H.v.,	Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre, 2.Aufl. Tübingen-Zürich 1951
Sutter, W.,	Wirtschaftlichkeitsberechnungen als Planungsinstrument, Methoden und Untersuchungen für verfahrensmäßige und industrielle Planung mit Beispielen und Schaubildern, Herne-Berlin 1964
Swoboda, P.,	Die betriebliche Anpassung als Problem des Rechnungswesens, Wiesbaden 1964
Terborgh, G.,	Dynamic Equipment Policy, New York-Toronto-London 1949
Terborgh, G.,	MAPI Replacement Manual, Chicago Ill. and Crawfordsville Ind. 1950
Terborgh, G.,	Business Investment Policy, 2. Aufl. Washington 1962
Terborgh, G.,	Leitfaden der betrieblichen Investitionspolitik, deutsche Übersetzung von Albach, H., Wiesbaden 1962
Ulrich, E.,	Physikalisches Praktikum (Repetitorium des Ingenieurwissens), Essen 1963
Wagenführ, R.,	Statistik leicht gemacht, Köln 1963
Westphal, W.W.,	Physikalisches Praktikum, Braunschweig 1961

Wittmann, W., Unternehmung und unvollkommene Information, Köln und Opladen 1959

Zeidler, F., Wesen und Wirtschaft des Betriebes, Düsseldorf 1962

Zurmühl, R., Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, 4. verb. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963

B. Aufsätze in Zeitschriften und Sammelwerken

Ahlsdorff, M., Zum Problem der Differenzinvestition, in: ZfB 34 Jg. 1964, S. 449 ff

Albach, H., Investitionspolitik in Theorie und Praxis, in: ZfB 28 Jg. 1958, S. 766 ff

Albach, H., Die Berechnung der Wirtschaftlichkeit betrieblicher Investitionen, in: ZfB 29. Jg. 1959, S. 419 ff

Backhaus, K.-E., Mommerth, K.H., Betriebswirtschaftlicher Vergleich zwischen Diesel- und Akkumulatorlokomotive im Grubenbereich unter Tage, in: Glückauf, 95. JG. 1959 Heft 24, S. 1518 ff

Barlow, R., Hunter, L., Optimum Preventive Maintenance Policies, in: OR Vol. 8 1960, S. 90 ff

Bartholomew, D.J., Two-stage Replacement Strategies, in: OR Operational Research Quarterly Vol. 14 1963, S. 71 ff

Bosford, I.E., Measures of Dependability, in: OR Vol. 8 1960, S. 53 ff

Boulding, K.E., The Theory of a Single Investment, in: Quarterly Journal of Economics Bd. 49 1934:35, S. 475 ff

Boulding, K.E., Time and Investment, in: Economica Vol. III 1936, S. 196 ff

Boulding, K.E., "Time and Investment" A Reply, in: Economica Vol. III 1936, S. 440 ff

Brokmeier, K.-H., Lang, W., Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen beim induktiven Schmelzen von Gußeisen und Stahl, in: Giesserei, Zeitschrift für das gesamte Giessereiwesen, 45.Jg. 1958 Heft 17, S. 465 ff

Buzzanca, V., Goldstein, M.H.,	Equipment Maintenance Procedures, in: OR Vol. 11 1963, S. 519 ff
Caplan, B.,	The Premature Abandonment of Machinery, in: The Review of Economic Studies Vol. 7 1939/40, S. 113 ff
Crookes, P.C.I.,	Replacement Strategies, in: OR Operational Research Quarterly Vol. 14 1963, S. 167 ff
Dean, B.V.,	Replacement Theory, in: Progress in Operations Research (Hrsg. Ackoff, R.L.) ORSA Nr. 5, New York-London 1961, S.327 ff
Debeau, D., James, G., Drozda, W.,	Component Replacement Liability, in: MS Vol. 6 1960, S. 295 ff
	Deutsche Normen DIN 1333, Runden von Zahlen, Regeln - Kennzeichnung, Berlin W und Köln 1958
	Deutsche Normen DIN 1333, Runden von Dezimalzahlen, Entwurf 1965
Dreyfus, S.,	Dynamic Programming, in: Progress in Operations Research (Hrsg. Ackoff, R.L.), ORSA Nr. 5 New York-London 1961
Dzieyk, B.,	Wirtschaftlichkeit von Vorrichtungen in Abhängigkeit von der Fertigungsstückzahl, in: Werkstatt und Betrieb 89. Jg. 1956 Heft 3, S. 131 ff
Eisen, M., Leibowitz, M.,	Replacement of Randomly Deteriorating Equipment, in: MS Vol. 9 1963, S. 268 ff
Fetter, R.B., Goodman, T.P.,	An Equipment-Investment Analog, in: OR Vol. 5 1957, S. 658 ff
Fisher, J.L.,	A Class of Stochastic Investment Problems, in: OR Vol. 9 1961, S. 53 ff
Flehinger, B.J.,	System Reliability as a Function of System Age; Effects of Intermittent Component Usage and Periodic Maintenance, in: OR Vol. 8 1960, S. 30 ff
Greenberg, H.,	Failure Testing in Preventive Maintenance, in: OR Vol. 8 1960, S. 406 ff
Heinen, E.,	Die Zielfunktion der Unternehmung, in: Zur Theorie der Unternehmung (Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg), Wiesbaden 1962

Hotelling, H.,	A General Mathematical Theory of Depreciation, in: The Journal of the American Statistical Association, Vol. 20 1925, S. 340 ff
Jacob, H.,	Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: ZfB 34. Jg. 1964, S. 487 ff
Jacob, H.,	Neuere Entwicklungen in der Investitionsrechnung, in: Betriebswirtschaftliche Umschau, Die aktive betriebswirtschaftliche Zeitschrift, 34.Jg. 1964 Nr. 7/8, S.197 ff
Jaiswal, N.K., Thiruvengadam, K.	Simple Machine Interference with Two Types of Failure, in: OR Vol. 11 1963, S.624 ff
Jorgenson, D.W., McCall, J.J.,	Optimal Replacement Policies for a Ballistic Missile, in: MS Vol. 9 1963, S.358 ff
Jorgenson, D.W., McCall, J.J.,	Optimal Scheduling of Replacement and Inspection, in: OR Vol. 11 1963, S. 732 ff
Kettelle, J.D.,	Least-Cost Allocation of Reliability Investment, in: OR Vol. 10 1962, S. 249 ff
Kilger, W.,	Zur Kritik am internen Zinsfuß, in: ZfB 35. Jg. 1965, S. 765 ff
Lücke, W.,	Investitionsrechnungen auf der Grundlage von Ausgaben oder Kosten?, in: ZfhF NF 7. Jg. 1955, S. 310 ff
Lücke, W.,	Investitionsrechnung - aber wie?, in: Der Volkswirt Nr. 5 1965, S. 153 f
Lücke, W.,	Die kalkulatorischen Zinsen im betrieblichen Rechnungswesen, in: ZfB 35. Jg. 1965, Ergänzungsheft S. 3 ff
McCall, J.J.,	Operating Characteristics of Opportunistic Replacement and Inspection Policies, in: MS Vol. 10 1963, S. 85 ff
McCall, J.J.,	Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey, in: MS Vol. 11 1965, S. 493 ff
Moxter, A.,	Der Einfluß der Amortisationsgeschwindigkeit auf die unternehmerische Investitionsentscheidung, in: ZfhF NF 11. Jg. 1959, S. 541 ff
Moxter, A.,	Die Bestimmung des Kalkulationszinsfußes bei Investitionsentscheidungen, in: ZfhF NF 13. Jg. 1961, S. 186 ff

Müller, H.,	Wirtschaftlichkeitsrechnung auf Eisenhüttenwerken (Bericht Nr. 277 des Ausschusses für Betriebswirtschaft des Vereins deutscher Eisenhüttenleute), in: Stahl und Eisen Nr. 22 1956, S. 1486 ff
Naik, M.D., Nair, K.P.K.,	Multistage Replacement Strategies, in: OR Vol. 13 1965, S. 279 ff
N.N.	Investitionsrechnung, in: Kostenrechnungspraxis Nr. 3 1964, S. 93 ff
Orensteen, R.B.,	Topics on the MAPI Formula, in: Journal of Industrial Engineering, Vol. 7 1956, S. 283 ff
Pack, L.,	Rationalprinzip und Gewinnmaximierungsprinzip, in: ZfB 31. Jg. 1961, S. 207 ff und 283 ff
Pack, L.,	Maximierung der Rentabilität als preispolitisches Ziel, in: Zur Theorie der Unternehmung (Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg), Wiesbaden 1962
Passmann, B.,	Die Wirtschaftlichkeit der Mechanisierung und Elektrifizierung im französischen Steinkohlenbergbau, in: Glückauf 92. Jg. 1956 Heft 45/46, S. 1352 ff
Philipp, F.,	Unterschiedliche Rechnungselemente in der Investitionsrechnung, in: ZfB 30. Jg. 1960, S. 26 ff
Phipps, T.E.,	Machine Repair as a Priority Waiting-Line Problem, in: OR Vol. 4 1956, S. 76 ff
Preinreich, G.A.D.,	The Economic Life of Industrial Equipment, in: Economica Vol. 8 1940, S. 12 ff
Radner, R., Jorgenson, D.W.,	Opportunistic Replace of a Single Part in the Presence of Several Monitored Parts, in: MS Vol. 10 1963, S. 70 ff
Roos, C.F.,	A Mathematical Theory of Depreciation and Replacement, in: American Journal of Mathematics, 1928, S. 147 ff
Rummel, K.,	Wirtschaftlichkeitsrechnung (Bericht Nr. 109 des Ausschusses für Betriebswirtschaft des Vereins deutscher Eisenhüttenleute), in: Archiv für das Eisenhüttenwesen 10. Jg. 1936 Heft 2, S. 73 ff
Sanderson, G.B.,	A Note on The Theory of Investment, in: Economica Vol. VIII 1941, S. 176 ff

Sandiford, P.J., Bern- Three Applications of Operations Re-
holtz, B., Shelson, W.,search in a Large Electric Utility,
in: OR Vol. 4 1956, S. 663 ff

Schaub, W., Wirtschaftlichkeitsrechnungen, Refa-Nachrichten 1955, S. 71 ff

Schiff, E., The Econometrics of Three Investment Incentives, unveröffentl. Manuskript

Schindler, H., Investitionsrechnungen auf der Basis neuer theoretischer Erkenntnisse, in: ZfhF NF 8. Jg. 1956, S. 462 ff

Schneider, E., Die wirtschaftliche Lebensdauer industrieller Anlagen, in: Weltwirtschaftliches Archiv Bd. 55, Kiel 1942

Schwan, H.T., Die Ersatzbeschaffung von Maschinen und Anlagen, in: Handbuch des Industrial Engineering (Hrsg. Maynard, H.B., Krüger, K.), Bd. VII, Berlin-W - Köln - Frankfurt/Main 1956

Seelbach, H., Entscheidungskriterien der Wirtschaftlichkeitsrechnung, in: ZfB 35. Jg. 1965, S. 302 ff

Sieben, G., Optimale Nutzungsdauer von Anlagegütern?, in: Kostenrechnungspraxis 1958, S.129 ff

Smith, V.L., Economic Equipment Policies: An Evaluation, in: MS Vol. 4 1957, S. 22 ff

Smith, V.L., Depreciation Market Valuations, and Investment Theory, in: MS Vol. 9 1963 Nr. 4, S. 693 ff

Swoboda, P., Die Ermittlung optimaler Investitionsentscheidungen durch Methoden des Operations Research, in: ZfB 31. Jg. 1961, S. 96 ff

Swoboda, P., Die simultane Planung von Rationalisierungs- und Erweiterungsinvestitionen und von Produktionsprogrammen, in: ZfB 35. Jg. 1965, S. 148 ff

Taylor, J.S., A Statistical Theory of Depreciation, in: The Journal of the American Statistical Association, Vol. 18 1923, S. 1010 ff

Terborgh, G., Identification and Solution of Nonformula Problems, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1960

Terborgh, G., Screening Alternative Investment Projects, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1960

Terborgh, G., Effect of Anticipated Inflation on Investment Analysis, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1960

Terborgh, G., Lease-Purchase Alternatives, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961

Terborgh, G., Analysis of "Front-Office" Projects, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961

Terborgh, G., Common Nonformula Problems, A MAPI-CTA Research Study, Washington 1961

Terborgh, G., Administrations of Investment Policy, (Studies in Business Investment Strategy 1) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963

Terborgh, G., Selection of the Analytical System (Studies in Business Investment Strategy 2) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963

Terborgh, G., Front-Office Responsibilities in Project Analysis (Studies in Business Investment Strategy 3) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963

Terborgh, G., The Required Return from Investment Projects (Studies in Business Investment Strategy 4) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963

Terborgh, G., Control of Capital Employed (Studies in Business Investment Strategy 5) A MAPI-CTA Research Study, Washington 1963

Truelove, A.J., Strategic Reliability and Preventive Maintenance, in: OR Vol. 9 1961, S. 22 ff

Witthoff, J., Die Wirtschaftlichkeit der Zerspanung, in: Maschinenmarkt, Werkzeugmaschinenmarkt-Praxis (2. Forschungs- und Konstruktionskolloquium Werkzeugmaschinen) 1955, S.19ff

Wright, C.A., A Note on "Time and Investment", in: Economica Vol. III 1936, S. 437 ff

Zimmermann, W., Das MAPI-Verfahren, eine Methode zur Analyse der Wirtschaftlichkeit von Investitionsvorhaben, in: ZfR 1965 Nr. 2 und 3, S. 40 ff und 57 ff

C. Dissertationen

Ahlsdorff, M.,	Probleme des innerbetrieblichen Transportes, Göttingen 1965
Böckmann, W.,	Investitionsrechnungen, Berlin 1960
Briel, H.v.,	Die Ermittlung der wirtschaftlichen Nutzungsdauer von Anlagegütern, Winterthur 1955
Holler, A.,	Die Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer von Anlagen, Münster 1962
Schneider, H.,	Die Grundlagen der Investitionstätigkeit in der betrieblichen Praxis, München 1957

L e b e n s l a u f

Am 3. Juni 1938 wurde ich, Jürgen Friedrich Bloech, als Sohn des Gutsbesitzers, Diplom-Landwirt Dr. Hans Bloech und seiner Frau Helene, geb. Rehahn, in Tranßau/Ostpreußen geboren. Nach einem halben Jahr auf der Volkschule Tranßau wurde der Schulbesuch für zwei Jahre durch Flucht und Internierung in Dänemark unterbrochen und erst im Juni 1947 in Hilders/Rhön fortgesetzt.

Im April 1949 wurde ich in die Sexta der Zweigstelle Hilders des Domgymnasiums Fulda aufgenommen. Als mein Vater im September 1950 als Dozent an die Höhere Landbauschule Witzenhausen versetzt wurde, wechselte ich zum Gymnasium Bad Sooden-Allendorf über. Im Juni 1956 fuhr ich für ein Jahr als Austauschschüler nach New Enterprise/Pennsylvania, wo ich an der Replogle Highschool das amerikanische Reifezeugnis erwarb. Nach Deutschland zurückgekehrt, setzte ich meinen Schulbesuch am Gymnasium Bad Sooden-Allendorf im August 1957 fort und bestand das Abitur am 14. März 1958.

Nach einer halbjährigen praktischen Tätigkeit in der Maschinenfabrik Benno Schilde AG in Bad Hersfeld begann ich das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München. Nach neun Semestern erhielt ich den Grad des Diplom-Ingenieurs und immatrikulierte mich am 24. April 1963 in die Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät an der Georg-August-Universität zu Göttingen.

Seit dem 8. Januar 1964 verwalte ich die Planstelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Betriebswirtschaftlichen Seminar bei Professor Dr. W. Lücke, dem Direktor des Seminars für betriebswirtschaftliche Produktionsforschung.

BAMBERGER FOTODRUCK • Rudolf Rodenbusch